Wolters-Noordhoff

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

5

jaargang 66 1990 | 1991 januari

● **Euclides** ● ● ● ●

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

ISSN 01.65-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

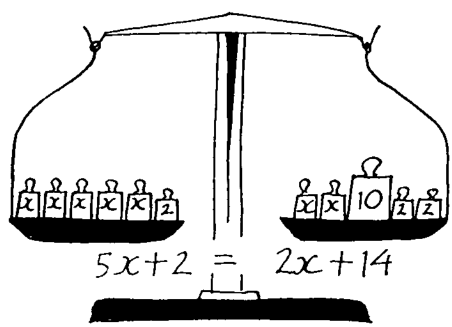
Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 58,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 37,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 9,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

Inhoud



een weegschaal als ezelsbrug

► Wiskunde A voor mavo en lbo?

Bram van der Wal

Zo langzamerhand trekt de rook rond de inhoud van het nieuwe examenprogramma mavo/lbo C/D op. De contouren van hetgeen we kunnen verwachten zijn zichtbaar. Het concept-examenprogramma, de vele lespakketjes en de tot nu toe verschenen voorbeeld- en experimentele examens, de laatste gericht op het huidige programma, dan wel op een nieuw programma, geven op z'n minst de richting aan waarin een en ander zich beweegt.
Op de regionale bijeenkomsten in oktober en november waren er veel vragen over het nieuwe programma. Allerwege is er kritiek op de vernieuwingen te horen. Het één noch het ander is verontrustend. Elke vernieuwing gaat immers gepaard met onzekerheden. Bovendien: de COW en het team W 12 - 16 vragen om zo veel mogelijk commentaar op de plannen.

Wiegedood

Ondanks de relativerende opmerkingen hierboven waag ik het er op een aantal kritische opmerkingen te maken in de richting van de plannenmakers. Dat er voor de groep 12 - 16 op wiskundegebied iets moest gebeuren stond voor velen vast. Niet alleen omdat voor de rest van het voortgezet onderwijs al nieuwe programma's gelden maar ook en vooral omdat er nieuwe inzichten zijn, omdat de maatschappij verandert en omdat in het huidige programma een stuk verstarring is ingetreden. Genoeg redenen dus om de bezem uit de kast te halen.
Toch geeft hetgeen er nu op tafel ligt voldoende aanleiding om te vrezen dat de nieuwgeborene de wiegedood zal sterven. Vreemd genoeg door een aantal van de eigen uitgangspunten.

Aansluiting

Een van de uitgangspunten die COW heeft geformuleerd is dat het wiskundeonderwijs moet aansluiten bij het vervolgonderwijs. Op geen enkele wijze wordt dat uit het materiaal duidelijk. Op de regionale bijeenkomsten was met name vanuit het havo erg veel kritiek op de inhoud van het programma. Vooral de vele onduidelijkheden die er heersen rond de algebralijn roept twijfels op. Het gemak waarmee letterrekenen, ontbinden in factoren en merkwaardige produkten worden weggepoetst en de simpele opmerking dat tweedegraadsvergelijkingen opgelost kunnen worden met een formule doet het ergste vrezen. Niet alleen de aansluiting met het havo komt hiermee op de tocht te staan, ook de aansluiting met een aantal vormen van Middelbaar Beroeps Onderwijs, zoals het Middelbaar Technisch Onderwijs en het Middelbaar Economisch en Administratief Onderwijs, wordt slechter. Dat op dit moment de aansluitingen ook niet altijd optimaal zijn doet op dit moment niet ter zake.

Speciale groepen

COW en de werkgroep 12 - 16 hebben zich *nadrukkelijk tot doel* gesteld een grotere groep leerlingen te bereiken. Daarbij wordt onder andere gedacht aan allochtonen. Velen juichen dat streven toe. Helaas munt het tot nu toe geproduceerde materiaal, door het vele leeswerk in de opdrachten, in dit opzicht niet uit. Bovendien is in het materiaal nauwelijks iets te vinden dat met name voor allochtone leerlingen interessant zal zijn.
Nog vreemder is echter de opmerking dat bij het beantwoorden van de vragen de *nadruk ligt op het*

geven van een goede redenering! Het laatste waar ik dan aan denk is aan een Marokkaanse leerlinge. Dat er speciale aandacht wordt geschonken aan meisjes is eveneens toe te juichen. Ook hier geldt dat in het materiaal nauwelijks een lijn is te ontdekken die het ideaal van een vrouwvriendelijke wiskunde dichterbij brengt.

Te veel hooi op de vork

Al met al lijkt het er op dat de werkgroep 12 - 16 te veel in een keer heeft willen doen. Daardoor is het geheel noch vlees noch vis geworden. De winst die behaald wordt in de voor leerlingen herkenbare situaties wordt verlies als daardoor het letterrekenen wordt verwaarloosd. Hetzelfde geldt voor het op de voorgrond stellen van een goede redenering in plaats van het geven van standaardoplossingen met als negatief effect dat daardoor allochtone en taalzwakke leerlingen de dupe zijn. Nagestreefde aansluitingen op het vervolgonderwijs lijken eerder in het tegendeel om te slaan.
Al met al kom ik tot de conclusie dat er veel goeds in het nieuwe wiskundeprogramma is te vinden maar dat er helaas te veel hooi op de vork is genomen. Daarmee is het lot van deze vernieuwing bezegeld.

Twee wiskundeprogramma's voor 12 - 16

Nu de wiskundeprogramma's nog in het stadium van inspraak zijn en er allerwege over gediscussieerd wordt moet er serieus over nagedacht worden om een nieuwe weg in te slaan. Het verschil tussen het C- en D-niveau wordt op dit moment omschreven als een verschil in de complexiteit in de opgaven. Met enig cynisme zou je dat kunnen vertalen met meer of minder van op basis van wensen en mogelijkheden ontstane compromissen. Los van alle andere vraagtekens die je kunt zetten bij het opstellen van twee dicht bij elkaar liggende programma's is het vreemd dat COW en de werkgroep 12 - 16, die er niet voor terugdeinzen erg veel overhoop te halen, hier in een zo traditionele opzet vervallen.
Beter lijkt het de nieuwe verworvenheden zo optimaal mogelijk uit te buiten door voor lbo en mavo twee verschillende programma's te ontwikkelen. In navolging van wat gerealiseerd is in het havo en vwo moet ook voor deze opleidingen een A- en een B-programma tot stand komen. Deze twee programma's zullen dan ná het doorlopen van de basisvorming aan bod komen. Dan is het mogelijk om voor een grotere groep leerlingen dan tot nu toe wiskunde toegankelijk te maken. Een 'A-achtig' programma biedt de mogelijkheid om datgene weg te laten dat voor verdere studie toch niet nodig is. Daarentegen geeft het de kans om zich volledig te concentreren op uitgangspunten als: wiskunde in voor leerlingen herkenbare situaties, wiskunde is nuttig buiten school, wiskunde voor meisjes en allochtonen en wiskunde voor zwak presterende leerlingen. Dit programma zou dan de plaats moeten innemen van het huidige C-programma. Bovendien zou een dergelijk programma naadloos kunnen aansluiten op de kerndoelen die voor de Basisvorming zijn beschreven.
Leerlingen die verder willen studeren in het havo/vwo of het mbo kunnen kiezen voor wiskunde D in gemoderniseerde vorm. Het programma voor het D-niveau hoeft dan minder concessies te doen waar het letterrekenen, gonio, het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen, de cirkelvergelijking en dergelijke betreft. Met behoud van de inhoud van het vigerende D-programma is het dan mogelijk daaraan een fors aantal nieuwe impulsen te geven.
Slechts door een scherpe scheiding aan te brengen tussen een 'A-achtig' en een 'B-achtig' programma is het mogelijk een vernieuwing door te voeren die het langer uithoudt dan de invoeringsfase.

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ Waar komt de schaftkeet te staan?

R. Leentfaar

Inleiding

Langs een rechte, zeer lange spoorweg werken n arbeiders elk op een vaste plaats. Waar langs die spoorweg moet een schaftkeet geplaatst worden, opdat het totaal aantal door de gezamenlijke arbeiders af te leggen kilometers zo klein mogelijk is?

Als de X-as langs de (as van de) spoorweg geplaatst wordt met een willekeurige oorsprong O en de arbeiders werken op de plaatsen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan komt het probleem neer op:

Bepaal x zodanig, dat $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x|$ minimaal is.

Een aantal studenten (en docenten) wist onmiddellijk te vertellen, dat het rekenkundig gemiddelde $\bar{x}$ van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de oplossing van dit probleem is. Zij zijn kennelijk in de war met een ander probleem:

Bepaal x zodanig, dat $g(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2$ minimaal is.

De oplossing van dat probleem is eenvoudig, omdat de continue en differentieerbare functie $g(x)$ gewoon gedifferentieerd kan worden.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 \Rightarrow$$

$$g'(x) = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - x) \Rightarrow g''(x) = +2\sum_{i=1}^{n} 1 = 2n.$$

Het minimum ($g''(x) > 0$ wegens $n > 0$) van g treedt dus op voor

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x = nx \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

Dat $g(x)$ een minimum heeft is overigens ook op voorhand wel duidelijk omdat $g(x)$ een som van kwadraten is.

De functie $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x|$

Door de gegeven x_i te hergroeperen, kunnen we zonder beperking van de algemeenheid bereiken, dat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een niet-dalende rij getallen is (d.w.z. $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$). Bij dat hergroeperen verandert $f(x)$ niet. We onderscheiden nu twee gevallen:

1 *Alle x_i zijn verschillend* ($x_1 < x_2 < \ldots < x_n$).
De functie $f(x)$ is continu ($|c - x| = |x - c|$ is continu en de som van continue functies is continu) maar niet differentiëerbaar.
Voor $x < x_1$ geldt $|x_i - x| = (x_i - x)$, zodat we krijgen $f(x) = (x_1 - x) + (x_2 - x) +$

$$+ \ldots + (x_n - x) = -nx + c \quad (c = +\sum_{i=1}^{n} x_i).$$

Links van $x = x_1$ is de grafiek van $f(x)$ dus een halve rechte lijn met richtingscoëfficiënt $= -n$. Passeren we nu $x = x_1$ van links naar rechts dan verandert van $f(x)$ de term $(x_1 - x)$ in $(x - x_1)$.
Op $[x_1, x_2]$ wordt $f(x)$ dus
$-nx + c - (x_1 - x) + (x - x_1) =$
$= -(n-2)x + c - 2x_1.$
Op dezelfde manier zal bij het van links naar rechts passeren van een punt $x = x_i$ de richtingscoëfficiënt van het betreffende lijnstuk toenemen met 2 (en de 'constante' afnemen met $2x_i$).
Helemaal rechts (voor $x > x_n$) zal de richtingscoëf-

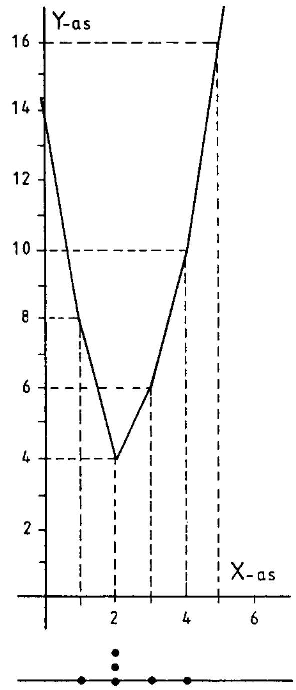
ficiënt dus (omdat er n punten gepasseerd zijn) $-n + 2n = +n$ bedragen (en de 'constante' is dan $-c$).
Samengevat: de grafiek van $f(x)$ bestaat uit een gebroken lijn met breukpunten bij $x = x_i$, terwijl de richtingscoëfficiënt bij het van links naar rechts passeren van zo'n breukpunt steeds met 2 toeneemt.

2 *Niet alle x_i zijn verschillend.*
In dit geval schuiven we gelijke punten denkbeeldig een stukje $\varepsilon > 0$ uit elkaar. Hierna kunnen we de redenering onder **1** weer toepassen. Dit betekent dat als een getal in de rij k-voudig voorkomt, de richtingscoëfficiënt met $2k$ wordt verhoogd als we dit k-voudige punt van links naar rechts passeren, omdat we dan als het ware k 'iets uit elkaar getrokken punten' passeren.

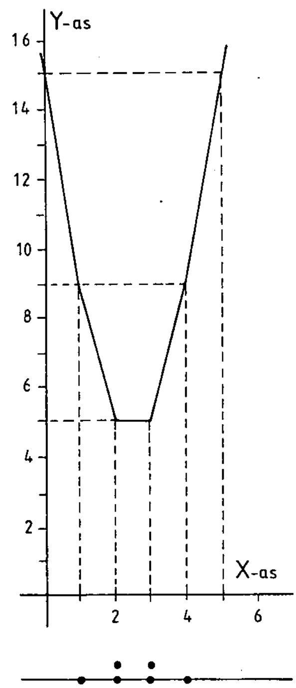
Het minimum van $f(x)$

a Als n oneven is, $n = 2p + 1$, dan heeft de rij $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een éénduidig bepaalde mediaan $x_{\text{ME}} = x_{p+1}$. Links daarvan is de richtingscoëfficiënt overal negatief (en oneven) en rechts daarvan is de richtingscoëfficiënt overal positief (en oneven).
Voor $x = x_{\text{ME}}$ heeft $f(x)$ dus een minimum.
b Als n even is, $n = 2p$, dan wordt x_{ME} meestal gedefinieerd als $x_{\text{ME}} = \frac{1}{2}(x_p + x_{p+1})$. Links van x_p is de richtingscoëfficiënt nu overal negatief (en even) en rechts van x_{p+1} overal positief (en even), terwijl de richtingscoëfficiënt op $[x_p, x_{p+1}]$ nul is.
We onderscheiden nu 2 gevallen:
b1 $x_p = x_{p+1}$. In dat geval schrompelt het lijnstuk $[x_p, x_{p+1}]$ ineen tot een punt en in dat punt treedt dus een 'gewoon' minimum op voor $x = x_{\text{ME}} = x_{p+1}$.
b2 $x_p \neq x_{p+1}$. In dat geval neemt $f(x)$ voor alle $x \in [x_p, x_{p+1}]$ de minimale waarde aan, dus ook voor $x = x_{\text{ME}} = \frac{1}{2}(x_p + x_{p+1})$.
Conclusie: In alle gevallen geldt, dat $f(x)$ de minimale waarde aanneemt voor $x = x_{\text{ME}}$.

Voor een tweetal eenvoudige rijtjes x_i ziet de grafiek van $f(x)$ er als volgt uit (onder de grafiek is de spoorweg met de arbeiders – elke stip stelt een arbeider voor – getekend):

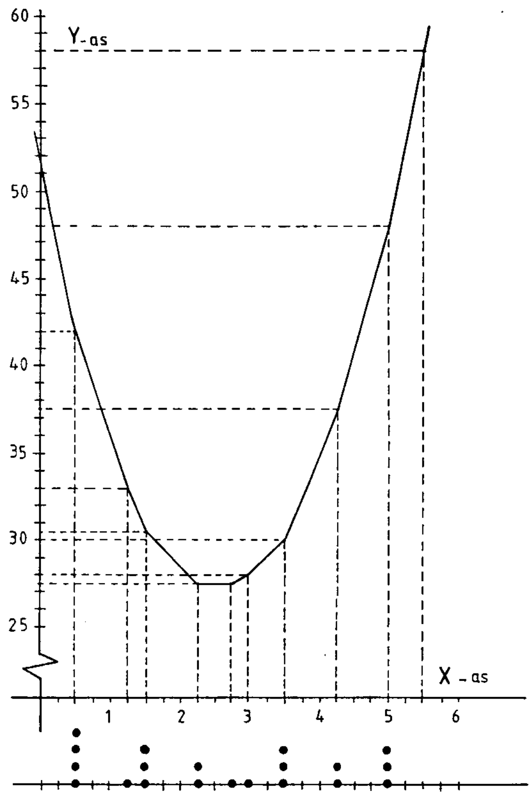


Figuur 1: $f(x)$ voor $x_i = 1, 2, 2, 2, 3, 4$.



Figuur 2: $f(x)$ voor $x_i = 1, 2, 2, 3, 3, 4$.

Ook voor een groter aantal arbeiders (20) is de grafiek van $f(x)$ getekend:



Figuur 3

Slotopmerking

De aanleiding tot dit artikel vormden pag. 48 en pag. 52 uit J. Neter, W. Wasserman and G. A. Whitmore: *Applied Statistics* (Allyn and Bacon, Inc, 773 pag., 1982), waarin de genoemde feiten over $x = \bar{x}$ en $x = x_{ME}$ zonder bewijs werden vermeld.

Over de auteur

R. Leentfaar is docent wiskunde aan de K.M.A. te Breda.

▶ Meetkunde en de ruimte om ons heen

En zo vallen we dus vanzelf weer terug op onze huis-, tuin- en keukenruimte en op ons oorspronkelijk probleem: is de meetkunde van onze gewone aanschouwingsruimte aan de ervaring ontleend of niet?
Gauss en Helmholtz meenden van wel. 'Die geometrischen Axiome' aldus Helmholtz 'sprechen gar nicht über die Verhältnisse des Raumes allein, sondern gleichzeitig auch über das Verhalten unserer festen Körper bei Bewegungen'. En Gauss heeft de hoeken van een grote driehoek tussen drie bergtoppen gemeten, om te zien of hun som 180 graden bedraagt. In een sferische ruimte, zo meent Helmholtz, zouden de mensen er vanzelf toe komen, een niet-Euclidische meetkunde op te stellen.
Hiertegenover merkt Henri Poincaré op, dat er voor de inwoners van een sferische ruimte twee mogelijkheden zouden zijn:
ze kunnen
1. de axioma's van Euclides laten vallen en de meetkunde aan het waargenomen gedrag van de vaste lichamen en lichtstralen aanpassen. Maar ze kunnen
2. ook vasthouden aan de meetkunde van Euclides, en concluderen dat de harde lichamen bij verplaatsing hun vorm en grootte veranderen.

Passage uit oratie Prof. Dr. B. L. van der Waerden, gehouden op 4 december 1950. Uit: Euclides, jaargang 26, 1950-1951.

► 'Uitleggen van wiskunde'[1]

een educatieve recensie

Fred Goffree

Op 8 juni 1990 promoveerde Sieb Kemme. Het resultaat van zijn studie en onderzoek ligt nu in boekvorm op tafel: 'Uitleggen van Wiskunde'. Een boek dat waard is om gelezen te worden door opleiders, wiskundeleraren en studenten. Wie goed leest kan er zeker van zijn na afloop het uitleggen van wiskunde genuanceerder te zien. Maar ik verwacht voor velen een rijkere opbrengst. Wie namelijk in de gelegenheid is en de tijd er voor wil nemen om de eigen uitlegpraktijk al, lezende ook in beschouwing te nemen, moet wel haast een betere uitlegger worden.
Kort samengevat komt de inhoud van het proefschrift op het volgende neer. Eerst wordt vanuit verschillende invalshoeken de terminologie ontwikkeld waarmee later observaties in schoollokalen beschreven en geïnterpreteerd kunnen worden. Het uitleggen van negatieve getallen, variabelen, lineaire vergelijkingen en hoeken is daartoe in diverse settingen geobserveerd. Tenslotte kan de auteur stellen: uitleggen is een vak en dat kun je leren.

Drie invalshoeken: talig, sociaal en cognitief

Uitleggen is in eerste instantie een zaak van taal. Het is dan ook niet vreemd dat Kemme zijn uitgangspunt voor de analyse van het fenomeen uitleggen zocht en vond bij 'de pragmatische taalhandelingstheorie'. Er is evenwel meer dan alleen de taligheid: uitleggen geschiedt altijd in een sociale context. Iemand legt iets uit aan een ander, het is iets tussen mensen. Die moeten met elkaar weten om te gaan. Hiermee heeft uitleggen een (cultureel-) antropologische dimensie gekregen. Een uitleg moet ook nog begrepen worden. Een uitleg valt goed als hetgeen naar voren wordt gebracht past in wat de toehoorder al weet, al verworven heeft, al tot zijn geestelijk eigendom heeft weten te maken. Met andere woorden, een uitleg wordt begrepen als de nieuwe informatie past in de beschikbare cognitieve schema's, of als die schema's zo aangepast kunnen worden dat de informatie er alsnog in opgenomen kan worden. Uitleggen heeft dus ook een cognitieve dimensie. Het lijkt er misschien op dat de wiskundeleraar zich vooral met de laatstgenoemde, de cognitieve dimensie dus, bezig houdt. Vragen als 'waar zijn we gebleven', 'wat weet de leerling al' en 'welke stof moet straks beheerst worden' wijzen daarop. Daarom is het zo aardig dat Kemme juist de taligheid van de uitleg niet uit het oog verliest. Uiteindelijk levert de taal het instrument om de wiskunde 'aan de man' te brengen. En wie zich van taal bedient, moet zich aan bepaalde regels houden. Taalhandelingstheoretici maakten een studie van die regels en in het verlengde daarvan kan ook het uitleggen aan bepaalde regels gebonden worden. Op blz. 11 e.v. noemt Kemme de regels die uitleggen van andere taalhandelingen onderscheidt.

Uitleggen en begrijpen zijn onlosmakelijk verbonden

'Uitleggen en begrijpen horen als siamese tweelingen bij elkaar' stelt de auteur op bladzijde 15 als aanhef van de paragraaf over 'begrijpend gedrag'. Bekend is het verschijnsel dat leerlingen met zeer verschillende resultaten een uitleg van de leraar kunnen verwerken. Neem de leerling die 'het' wel allemaal kon volgen, maar niet in staat is er iets van na te vertellen (die heeft receptief begrepen). Of een ander, die de uitleg wel kan reproduceren, maar

niet in staat is de eerstvolgende opgave over de behandelde stof te maken. Die ontbreekt het nog aan inzicht.
Kemme neemt hier een wetenschappelijk en praktisch standpunt in. Dat wil zeggen dat hij 'begrijpend gedrag' ruim interpreteert, ten eerste om zich als wetenschapper niet te laten leiden door één bepaalde visie op wiskundeonderwijs en in de tweede plaats om straks bij het onderzoek in de klas niet al bij voorbaat bepaalde uitleggen niet als zodanig te herkennen. Dus niet alleen als de leerling inzicht heeft verworven in de materie (het doel waarnaar elke 'oprechte' wiskundeleraar m.i. streeft), maar ook bijvoorbeeld als een leerling alleen maar weet wat hij moet doen om verder te komen, wordt er van begrijpend gedrag gesproken.
Richard Skemp heeft in dit verband de verhelderende termen 'instrumenteel' en 'relationeel' begrijpen gebruikt, later aangevuld met 'logisch' begrijpen. Op blz. 16 gaat de auteur daar nader op in.

Onderhandelen

Wat betekent 'kwadraat' voor u?
Ik denk dan aan de vermenigvuldigtabel, die ik zojuist in het kader van een 'tafelspel' heb gezien. De kwadraten staan op de diagonaal, van 1 tot en met 100. Bij kwadraat denk ik ook aan de toets op mijn ZRM met x^2. *Ik denk nu ook aan de functie* $f: x \rightarrow x^2$, *aan de grafiek van die functie, een (dal-) parabool met de top in de oorsprong. Ik denk, nu ik toch bezig ben, aan een vierkant. En aan de oppervlakte van een vierkant en aan de Stelling van Pythagoras...*
'Kwadraat' betekent iets voor een wiskundeleraar. Wat het betekent kun je zichbaar maken in soortgelijke 'verwijzingen' als hier boven. Wie iets uitlegt, bijvoorbeeld dat 'een-kwadraat-altijd-nooit-negatief-is', geeft onder meer betekenis aan 'kwadraat', 'nooit-negatief' en 'altijd'. De verwijzingen blijven vaak impliciet, ze spelen ogenschijnlijk in de uitleg geen rol. Maar pas op. Ook de leerling begint niet blanco. Wat de leraar naar voren brengt, moet door hem herkend en uiteindelijk geaccepteerd worden. Opdat beide partijen tenslotte dezelfde betekenis aan een uitspraak als 'een-kwadraat-is-altijd-nooit-negatief' geven, moet er heel wat onderhandeld worden. Overigens heeft Kemme met de formulering van 'een-kwadraat-altijd-nooit-negatief-is' laten zien dat hij in elk geval bereid is water bij de wijn te doen.

'Betekenis' is dus verankerd in 'verwijzingen'. De auteur laat dit op verschillende plaatsen in zijn boek zien als hij overgaat tot betekenisanalyses. Een mooi voorbeeld daarvan vindt men in paragraaf 5.2: het gebruik van letters in de wiskunde. Waar een letter in de wiskunde naar verwijst (naam, plaatsbepaler, gegeneraliseerd getal of afkorting), hangt af van de aard van de formule, waarin de letter voorkomt (rekenschema, vergelijking of bouwschema). De betekenis van een letter in de wiskunde, dat ligt in dit geval voor de hand, wordt binnen de wiskunde gevonden. Dat is anders in het geval van 'hoeken'. In paragraaf 7.1 laat Kemme zien dat voor dit begrip naar veel situaties buiten de wiskunde verwezen kan worden. In een 'kleine fenomenologie' komt het verschijnsel hoek in allerlei schakeringen naar voren. Uitleggers moeten van dit soort zaken goed op de hoogte zijn en ze moeten zich bovendien goed bewust zijn van het feit dat de betekenissen door de (persoonlijke?) verwijzingen gekleurd zijn.

Overigens bevat een uitleg ook nog andere signalen dan die, die de wiskundige leerstof betreffen. Dit is bijzonder interessant en ik denk dat het voor de meeste wiskundeleraren een nieuw gezichtspunt oplevert. Een leraar heeft bij het uitleggen zo ongeveer voor ogen wat de leerlingen ervan moeten opsteken. En niet alleen 'wat', maar ook 'hoe' en misschien zelfs 'waarom'. Tijdens de uitleg zendt hij dan ook, bewust of onbewust, signalen uit waaruit leerlingen kunnen opmaken welk 'begrijpend gedrag' van hen verwacht zal worden (blz. 20).

De taal van de klas

In de protocollen, die verderop in het boek zijn opgenomen, wordt de taal van de schoolklas gesproken; leraren komen aan het woord, leerlingen

doen hun zegjes in reactie daarop en schoolboekjes leveren de stof. De onderzoeker bevindt zich met kennelijk plezier temidden van dit alles. Voordat we echter ook een kijkje nemen in de praktijk, moeten we, mèt de onderzoeker ons eerst enige theoretische begrippen en inzichten eigen maken.

Theorie van het uitleggen van wiskunde

Hoofdstuk 1 van het proefschrift, waarvan hiervoor al het een en ander is beschreven, is getiteld 'De theorie van het uitleggen.' Wat aan theoretische overwegingen eerder al naar voren kwam, laat zich kort samenvatten met de termen: taalhandeling, cognitief schema, betekenis, onderhandelen, begrijpen en begrijpend gedrag.
Vervolgens worden soorten uitleg en uitlegstrategieën besproken.

soorten uitleg
In deze paragraaf brengt Kemme nogmaals tot uitdrukking dat hij het fenomeen uitleggen breed wil opvatten. Wiskundeleraren zijn geneigd de 'waarom-vraag' centraal te stellen. Het is niet interessant dàt een kwadraat niet-negatief is, maar wel waaròm dat zo is. Kemme maakt dit onderscheid niet en laat een heel scala de revu passeren: uitleg 'waarom', 'wat', 'hoe', 'dat'.

uitlegstrategieën
Verschillende uitlegsoorten vragen om verschillende aanpakken van de uitleg. Maar ook opvattingen over wiskunde of inzichten in de didactiek kunnen tot verschillende strategieën leiden.
In de wiskundeles wordt veel gebruik gemaakt van analogieën. Het mooist vind ik persoonlijk de metaforische analogie. Daarbij gebruik je een beeld (verschijnsel, object, situatie...) van buiten de wiskunde om een wiskundige situatie, die nauwe vormverwantschap ermee vertoont, te leren begrijpen. Kemme wijst hier al vooruit naar zijn onderzoek, waarin de metafoor van een BALANS wordt gebruikt om het rekenen aan lineaire vergelijkingen 'uit te leggen'.
Bij uitleg met behulp van analogie wordt onderscheid gemaakt tussen 'generaliserende', 'specialiserende', 'metaforische', 'exemplarische analogie' en 'analogie zonder meer'. Zo zeggen die termen waarschijnlijk niet veel, maar in het boek worden bij elk bekende uitlegvoorbeelden genoemd. Ook in de volgende paragrafen, waarin synthese, genese en analyse achtereenvolgens de uitlegstrategie typeren.

structuur van de uitleg
Hoe zit een uitleg in elkaar? Die vraag richt zich op het wezenlijke van het uitleggen. Het is, zo mogen we stellen, een kernvraag in dit verband.
De idee van kernvragen gaf Kemme een mogelijkheid om uitleggen in kaart te brengen. Een uitleg van enige omvang bestaat, dat laat zich begrijpen, uit fragmenten. 'Zetten', zou een schaker zeggen. Elk fragment is te rangschikken rondom een kernvraag, die naar de essentie van het fragment verwijst. Welnu, wie de fragmenten, in volgorde en met hun samenhang, in beeld kan brengen, schept zich een soort blauwdruk van de uitleg. De architectuur (= bouwstijl) wordt zichtbaar. Die overweging bleek inspirerend genoeg om op de ingeslagen weg verder te gaan. Er komen dan twee verschillende opbouwen, structuren worden ze hier genoemd, naar voren: de lineaire, stap-voor-stap-opbouw (bijvoorbeeld in het geval van een 'hoe-moet-je-iets-doen-uitleg') en de geneste opbouw (bij onder meer de 'waarom-iets-het-geval-is-uitleg'). In het laatste geval laat zich de complexiteit van de uitleg zien in de diepte van de gelaagdheid. Je kunt dat zo opvatten: de nesten zijn op zich zelf fragmenten van de uitleg, in een soort lineaire ordening. Maar elk nest is opgebouwd uit elkaar omsluitende fragmenten. Als het nu nodig is tijdens een uitleg diep in te gaan op elk der nesten dan kan het lastig zijn het verband met voorgaande en volgende nesten te blijven zien. Wie wel eens geprogrammeerd heeft, of een gecompliceerd programma moest trachten te begrijpen, kan zich hier wel wat bij voorstellen, denk ik.
Of een complexe uitleg ook een moeilijke (voor de toehoorder!) uitleg is, volgt hier niet uit. Dat hangt ook af van andere factoren.

moeilijkheid van de uitleg
De moeilijkheid van een uitleg (let wel, moeilijk voor de leerling) hangt af van de structuur ervan. In de eerste plaats van de externe structuur, van de

verbindingen die gelegd kunnen worden met bekende zaken. Daarnaast hangt de moeilijkheid af van de interne structuur, van de samenhang die er is en van de vraag of die zichtbaar gemaakt kan worden. Eenvoudig te zien is in dit opzicht de ordening van de fragmenten. Een lineaire ordening weerspiegelt de chronologie van de uitleg, de achtereenvolgens te nemen stappen. Een uitleg wordt moeilijker, dat is nogal wiedes, als de ketens langer zijn. We zagen hiervoor ook al die andere ordening, de hiërarchische, opgebouwd uit verschillende lagen. Denk maar aan de rangen in het leger. Hoe meer lagen, des te moeilijker is het geheel te begrijpen. Zo kom je op de 'diepte van de gelaagdheid' als maat voor de moeilijkheid.
Behalve de ordening van de fragmenten is ook de samenhang in betekenissen van belang. De complexiteit van de verbindingen bepaalt gedeeltelijk ook de moeilijkheid van een uitleg.

duidelijkheid
Op blz. 34 lezen we: 'Een docent vertoont duidelijk gedrag als de leerlingen precies weten welk gedrag van hen geëist wordt en welke toleranties daarin zijn toegestaan.'
Duidelijkheid, nuanceert Kemme vervolgens, heeft een lokaal, globaal en interlokaal niveau. Leerlingen moeten bij elke stap in de uitleg begrijpen waarover het gaat, ze moeten de totaliteit van de uitleg en het einddoel voortdurend in zicht houden en de samenhang tussen de verschillende stappen, fragmenten of fasen in het uitlegproces dient precies aangegeven te worden.

Moeilijkheid en duidelijkheid liggen dicht bij elkaar. Zou er niet een zekere afhankelijkheid tussen deze twee onderzoeksvariabelen bestaan? Een uitleg die niet duidelijk is, wordt als moeilijk ervaren, zou je zo denken. En een gemakkelijke uitleg is vast ook duidelijk. In een van de 5 onderzoekingen die Kemme in het verlengde van bovengenoemde theorie heeft verricht, bleek het mogelijk het al dan niet bestaan van die afhankelijkheid op de proef te stellen. Dat geschiedde in het kader van hoofdstuk 3: 'Presentatie van een wiskundig onderwerp'.[2]
Studenten van de universitaire lerarenopleiding kregen de opdracht een gegeven wiskundige tekst aan de medestudenten uit te leggen. Elke presentatie werd in tweetallen voorbereid en door alle anderen 'beoordeeld'. Op het enquêteformulier kwamen onder meer 'duidelijkheid van de uitleg' en 'moeilijkheid van het onderwerp' voor. De scores van 208 ingevulde formulieren gaven iets prijs van een mogelijk verband. Wat dan blijkt zal weinig docenten verrassen:
'Niet moeilijk, wel duidelijk' en 'duidelijk, niet moeilijk' hangen in grote mate samen. Andere mogelijke samenhangen (bijvoorbeeld: 'moeilijk, niet duidelijk') vallen erbij in het niet.

De gebieden van onderzoek

Met het laatste zijn we ongemerkt van de theorie afgedwaald en in het onderzoek zelf terechtgekomen. Eén van de vijf onderzoeken is nu genoemd. Wie het boek daar openslaat, kan genieten van het geworstel van twee studenten, Hennie en Ron. Ze laten zien dat uitleggen voor beginners niet meevalt. Zelfs niet in de veilige situatie temidden van medestudenten, waarin diverse voorwaarden van de pragmatische taal-handelingstheorie vervuld zijn.
Vier gebieden van onderzoek blijven over. Hieronder vindt u ze, in termen van leerstof geduid, aangevuld met een verwijzing naar de uitlegproblematiek.

Negatieve getallen
of 'waarom een heks wèl en het treintje niet'

De 'invoering' van negatieve getallen heeft in het verleden gerenommeerde wiskundigen goed beziggehouden. Vandaag aan de dag zijn het de wiskundeleraren in de onderbouw van het voortgezet onderwijs, die zich er nog druk over kunnen maken. En soms lijkt het erop dat brugklassers, die met het onderwerp geconfronteerd worden, zich weinig zorgen maken.
Maar we bekijken het onderwerp nu van de kant van de uitlegger, de leraar met zijn schoolboek dus. Dit is Moderne Wiskunde, deel 1, 4de editie. Daar-

in wordt uitgelegd hoe je met negatieve getallen moet opereren. Voor het optellen en aftrekken gebruikt men het verhaal van een 'heks', om volgens de regels te kunnen vermenigvuldigen (en delen) wordt een 'treintje' geïntroduceerd. Twee contexten en hoe komt het, vraagt Kemme zich af, dat de eerste wèl en de tweede geen succes heeft bij de leerlingen?

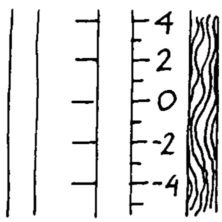
17 We gaan op bezoek bij een heks, die in een grote ketel een vreemd drankje klaarmaakt. Ze heeft wonderlijke blokjes om de temperatuur in die ketel te regelen. Ze gebruikt warme blokjes die niet afkoelen en koude blokjes die niet smelten. Als er evenveel warme als koude blokjes in de ketel zitten, is de temperatuur in de ketel 0°. Gooit ze er nu bijvoorbeeld 8 warme blokjes bij, dan zal de temperatuur 8° worden. Als het recept van het drankje aangeeft dat de temperatuur 5 graden moet dalen, dan gooit ze er 5 koude blokjes in.



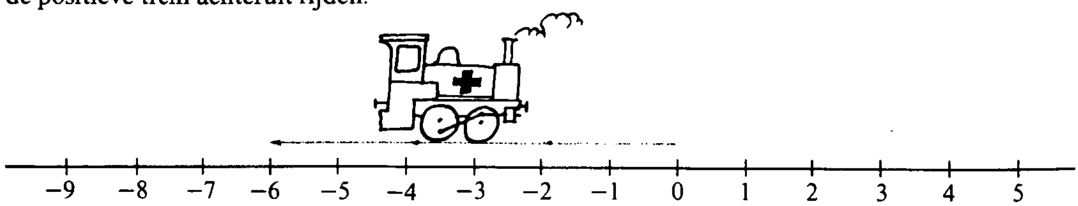
a De temperatuur in de ketel is −4°.
De heks doet er 6 warme blokjes bij.
De temperatuur wordt . . .

b De temperatuur in de ketel is 8°.
De heks gooit er 10 koude blokjes in.
De temperatuur wordt . . .

c De temperatuur in de ketel is −2°.
De heks gooit er 3 koude blokjes in.
De temperatuur wordt . . .



'Maar hoe reken ik −3 × 2 uit?', vraagt Jeroen.
'Dat is eenvoudig', antwoordt zijn vader, 'dan laat je de positieve trein achteruit rijden.'



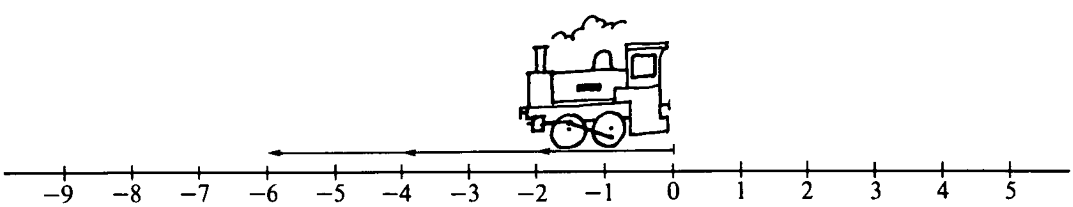
De uitkomst van −3 × 2 is −6.

De leraar in de brugklas mavo-havo-atheneum, die bij het onderzoek werd betrokken, probeerde het toch nog eens met die treintjes. Zijn uitleg is geprotocolleerd en in een blauwdruk samengevat. Eigenlijk zou men het schoolboek erbij moeten hebben, want dan ziet men dat elk uitlegfragment met een opgave uit het boek correspondeert.[3] Er is dus weinig van de leraar zelf bij. Wat hij probeert is de uitleg van een ander tot de zijne te maken. Het gaat ook deze leraar niet goed af en Kemme is goed in staat de manco's van zijn uitleg te verklaren. Een interessant element van die verklaring vormen de 'fenomenologische primitieven', 'elementen van de vanzelfsprekende ervaringswereld die van nature als verklaring van verschijnselen kunnen functioneren.' (blz. 100). Ze zijn bij de heks zo aan te wijzen, maar ontbreken in het treinenverhaal. Een conclusie is dat uitleggers voorzichtig moeten omspringen met niet-wiskundige contexten en metaforische analogieën.

En daar komt wat betreft het probleem van 'min maal min is plus' nog iets bij. Geen leraar is natuurlijk in staat om deze gemakkelijke vuistregel te doen vergeten met behulp van een complexe constructie als die van de treintjes.

Hanteren van formules
of 'uitleg op maat'

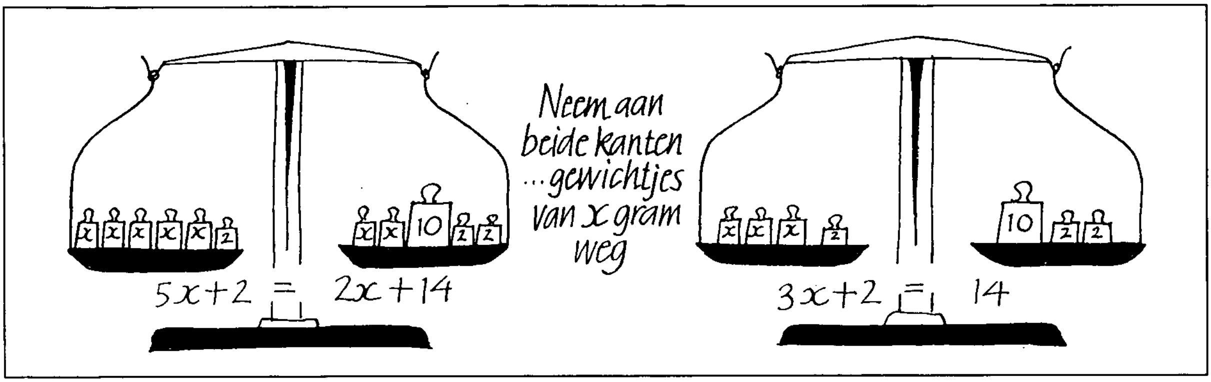
In hoofdstuk 5 komt in feite een groot en belangrijk gebied van de schoolwiskunde aan de orde: het begrip variabele en het gebruik van letters. Na een uitgebreide analyse van letters in de wiskunde, komen drie leraren aan het woord. Drie leraren met elk een eigen uitlegstijl, min of meer op maat gemaakt voor twee gymnasium brugklassen en een heterogene brugklas mavo-havo-vwo. Het gaat daarbij in hoofdzaak om het opstellen van een vergelijking. In de uitvoerige protocollen komt veel ter sprake. Bij de analyse ervan toont Kemme zich inmiddels een gevorderd onderzoeker, hij heeft blijkbaar al veel erbij geleerd. Dat blijkt als de verschillende uitleggen met de woorden van hoofdstuk 1 beschreven worden. Daar kan men zien hoe de moeite van de theoretische beschouwing en reflectie vooraf loont. De lezer kan er zijn voordeel mee doen.



•••• De negatieve trein gebruik je om 3 × −2 te berekenen. Deze trein begint ook bij het getal 0, maar hij rijdt vooruit naar links.

Zo vinden we: **3 × −2 = −6**

39 Met behulp van de negatieve trein kun je nu ook uitrekenen hoeveel −3 × −2 is.
Wat moet je dan doen?



Oplossen van lineaire vergelijkingen
of 'een weegschaal als ezelsbrug'

Het oplossen van eenvoudige vergelijkingen mag men zien als een wiskundige basisvaardigheid. Die basisvaardigheid is tweeledig: in de eerste plaats moeten de leerlingen een vergelijking kunnen opvatten als een symbolische weergave van een praktische situatie, in de tweede plaats moeten ze de formele vaardigheid bezitten om de vergelijking op te lossen (blz. 163). Hoe dat oplossen van lineaire vergelijkingen geschiedt, wordt uitgelegd door dezelfde leraar in twee klassen: een tweede klas mavo en een tweede klas atheneum. Kemme is erbij aanwezig, als zeer geïnteresseerd onderzoeker. Hij ziet hoe alweer een metaforische analogie als uitlegmiddel wordt gehanteerd. Het is de weegschaal. En 'het' werkt. Net als de heks.

Het begrip hoek
of 'de studieuze uitlegger'

De uitleg van wat men in de wiskunde onder hoek verstaat, geschiedt door één leraar in zijn gymnasiumbrugklas. Maar voordat de lezer het uitvoerige protocol van enige lessen in ogenschouw kan nemen, heeft Kemme hem van drie verschillende standpunten met 'hoeken' laten kennismaken. Hij doet dat middels (a) een analyse van het verschijnsel 'hoek', (b) een historisch onderzoek naar de wortels van het hoekbegrip en (c) een psychologische beschouwing over de vorming van een hoekbegrip in het kader van de niveautheorie van de Van Hieles. Met een dergelijk brede achtergrond wordt het uitleggen van wiskunde van 'kunst' tot 'kunde'.
De auteurs van het gebruikte schoolboek, nog steeds 'Moderne Wiskunde' 4de editie, laten zien dat ze het verschijnsel hoek ook breed bestudeerd hebben, de leraar profiteert daarvan in zijn uitleg. Een fragment van die uitleg karakteriseert Kemme later als een 'uitleg-wat-iets-is'. Een volgend fragment als 'de-uitleg-hoe-je-hoeken-met-elkaar-vergelijkt'. Het laatste onderdeel mislukt als uitleg. Dat komt omdat de docent op een abstract niveau van 'meten' opereert. Hij verwijst naar het vergelijken van gewichten om de leerlingen op het idee te brengen hoe hoeken vergeleken kunnen worden. Maar die ellendige weegschaal, eerder metafoor voor het oplossen van vergelijkingen, komt hier roet in het eten gooien. De gewichten roepen dat nu onbruikbare beeld op en de leerlingen staan gelijk op het verkeerde been. Maar uiteindelijk komen ze er toch uit. Het hoekbegrip wordt verankerd in de intuïtieve noties 'grootte van een draaiing' en 'richting van de draaiing'. De strategie om leerlingen via het vergelijken van hoeken, door ze op elkaar te leggen, tot een uitspraak over 'wat een hoek is' te brengen, blijkt een vruchtbare. Kemme merkt op: 'Onder woorden brengen "wat je moet dòen" is gemakkelijker dan om te vertellen "wat iets is"' (blz. 198).'

Uitleggen is een vak en dat kun je leren

We zijn al weer aan het laatste hoofdstuk toe. Het is

inmiddels duidelijk geworden dat over uitleggen veel te zeggen valt. Kemme heeft door zijn studie het praten over uitleggen gemakkelijker gemaakt. Wie zo over zijn vak kan praten, maakt werkelijk een professionele indruk. Wie bovendien iets met de kennis kan doèn, is professioneel bezig. Voor lerarenopleiders dus een goede mogelijkheid een deel van hun curriculum met 'uitleggen' in te vullen. Wat Kemme zelf deed met zijn studenten, het seminarium 'de presentatie van een wiskundig onderwerp', kan met dit boek op de achtergrond een grotere diepgang krijgen. Je kunt leren uitleggen, is de stellige overtuiging van de promovendus van 8 juni.

Tenslotte

Het bedenken van een uitleg bij een zelf goed begrepen wiskundig onderwerp, behoort tot een van de mooie dingen van het beroep van wiskundeleraar. Op dit punt toonden zich in het verleden al vele collega's educatieve ontwerpers van formaat. Kemme heeft met zijn studie de mogelijkheid geschapen het uitleggen meer doordacht en systematischer dan voorheen te beoefenen. Lerarenopleiders kunnen vanaf nu een goed onderbouwde cursus 'Uitleggen van Wiskunde' gaan geven, wiskundeleraren die de opleiding al achter zich hebben gelaten, kunnen met dit boek iets aan hun eigen nascholing doen.
Moet ik u nog uitleggen dat Kemme naar mijn mening met zijn dissertatie niet alleen zichzelf, maar ook alle collega's een dienst heeft bewezen?

Noten

1 Sieb Kemme, *Uitleggen van wiskunde*, proefschrift, Groningen 8 juni 1990, 251 blz. Uitgever onbekend.
2 In bijlage 1 kan men zien over welke teksten het gaat. Het is voor deze studenten onbekende stof, zoals 'De rechte van Euler en de negenpuntscirkel'. 'De stelling van Morley'. 'Inversie in een cirkel'. 'Het 6- en 5-kleurenprobleem' en 'Regelmatige veelvlakken'.
3 Overigens zijn in de 5de editie van Moderne Wiskunde de treintjes vervangen door een heks met een schepnet. Op blz. 242 kon de auteur dit nog net melden.

Over de auteur:
Prof. Dr. Fred Goffree is verbonden aan de S.L.O. te Enschede en aan de Universiteit van Amsterdam. Hij is oud-hoofdredacteur van Euclides.

Mededeling

Brochures Keuzebegeleiding

Evenals vorig jaar geeft het project Wiskunde & Emancipatie weer twee brochures uit over Keuzebegeleiding wiskunde A en B op het havo. Eén brochure is bestemd voor leerlingen en de ander voor docenten, decanen en schoolleiders. Beide brochures zijn geactualiseerd in samenwerking met OW&OC.
In *de leerlingenbrochure* wordt een korte omschrijving gegeven van de inhoud van beide wiskundevakken. Daarnaast wordt aangegeven voor welke vervolgopleidingen wiskunde A en voor welke wiskunde B het meest geschikt is. Voor beide vakken zijn enkele voorbeeldopdrachten opgenomen, zodat de brochure met derde klassen is door te nemen.
In *de docentenbrochure* wordt allereerst een omschrijving van de inhoud van beide vakken gegeven. Vervolgens gaat men in op de eisen/wensen die vervolgopleidingen stellen t.a.v. wiskunde A en wiskunde B. Er wordt aandacht besteed aan de gevolgen van twee wiskundevakken voor de organisatie van de school. Er worden wat mogelijkheden besproken om leerlingen te begeleiden bij hun keuze voor wiskunde. Verder wordt er kort ingegaan op de betekenis van beide vakken voor MAVO leerlingen en het verschil tussen jongens en meisjes bij keuzebegeleiding. Tot slot is het eindexamenprogramma voor wiskunde A en wiskunde B voor het havo opgenomen en de eindexamenopgaven van mei '90.

De brochures zijn schriftelijk te bestellen bij:
Hogeschool Holland, Project Wiskunde & Emancipatie, Wildenborch 6, 1112 XB Diemen, onder vermelding van naam en adres en telefoonnummer van de school en vermelding van het aantal bestellingen *per brochure*.
De kosten zijn: *f* 1,– per stuk voor de leerlingenbrochure en *f* 2,– per stuk voor de docentenbrochure.

▶ Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (5)

Truus Dekker

Deze keer een aantal opgaven uit het experimentele C-examen lbo/mavo C/D 1990. In een gewijzigde vorm kwamen deze opgaven ook in het D-examen voor.

Het maken van de tekeningen (opg. 11, 14 en 17) was niet moeilijk.
Opgave 12 leverde voor de leerlingen veel problemen op; daarbij was nauwelijks verschil tussen leerlingen van mavo-C, lto-C of lhno-C. Een mogelijke verklaring daarvoor is dat leerlingen niet begrepen dat de vraag 'Leg uit waarom in *dat* geval de hoogte van ΔABC tweemaal de hoogte van het vierkant is', betekent dat je een berekening of bewijs moet geven. Het onderwerp van de vraag was niet te hoog gegrepen, gelijkvormigheid van driehoeken komt wel degelijk in het programma voor. Het is overigens voor leerlingen een lastig begrip. Het gebruiken van zo'n begrip in een verklaring stelt nog hogere eisen.
Bij opgave 15 komt daar een extra moeilijkheid bij, de configuratie als geheel blijft gelijk, de lijnstukken variëren. Je zo'n beweging kunnen voorstellen is niet eenvoudig. Henny, mavo-C, eindcijfer 8:
AB = 3 × zo groot als PQ.
3 : 2 = 1,5.
Bij de opgaven 12 en 15 werden bijna geen punten gescoord.
Bij het berekenen van de omtrek (opg. 13) rondden de meeste leerlingen te vroeg af. Ondanks de cursivering bij opg. 16 werden bij deze opgave en bij opg. 13 dikwijls omtrek en oppervlakte verwisseld; mavo- en lbo-leerkrachten zullen dat herkennen. Wilma noteerde zelfs:
Omtrek $\Delta ABC = 8 \times 6 = 6 \times 8 = 64\, cm^2$.
Opgave 19 vraagt om een intuïtief limietbegrip. Vrijwel alle leerlingen antwoordden hierop:
De hoogte wordt steeds lager (of kleiner).
Misschien hebben de leerlingen hierbij het driehoekje *SRC* voor ogen in plaats van de gehele driehoek *ABC*. Dat de hoogte van ΔABC nadert tot 4 heb ik bij geen enkele leerling gelezen. Irma schrijft:
Die zou op een gegeven moment in het vierkant PQRS terecht komen, omdat de lengte steeds groter wordt gaat de top naar beneden.
Ook opgave 20 was voor veel leerlingen te moeilijk. Een oppervlakte van $100\, cm^2$ voor ΔABC vond Ellie kennelijk erg veel, ze gaf op vraag 20 tenminste als antwoord:
Nee, dat kan haast niet omdat het dan zo lang is is het erg moeilijk om vanuit A + B de uiteinden met elkaar te verbinden + deze zouden dan plat op de grond komen.

Tijdens de examenbespreking gaven de docenten van de experimenteerscholen al aan dat deze manier van vragen stellen zowel voor de docent als voor de leerling veel lastiger is. Nakijken kost meer tijd maar ook bespreken van het gemaakte werk, zoals de oefenexamens, vraagt meer aandacht. Anders leren de leerlingen nog niets van hun gebrekkige formuleringen.

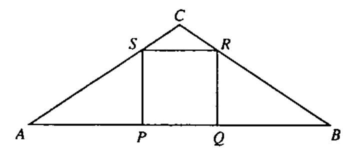
De vraagstelling is minder gestandaardiseerd dan bij de 'gewone' examens; ook dat is even wennen. Wat wordt er nu precies van je verwacht wanneer in de opgave staat: 'Geef een verklaring'?
Deze opgave bleek als examenopgave geen succes maar we geven de moed niet op. Als oefenopgave, om aan te geven wát we van leerlingen verwachten, zal deze opgave uitstekend dienst kunnen doen. Want een goede verklaring kunnen vinden en die dan ook nog op de juiste manier kunnen verwoorden is een heel belangrijke vaardigheid die niet alleen voor het vak wiskunde geldt.

● Werkblad ●

▶ Driehoeken om een vierkant (1)

Als er om het nummer een ○ staat, hoef je bij een antwoord geen uitleg te geven. Bij alle andere opgaven schrijf je op hoe je aan het antwoord komt.
Opgaven die naar de bijlage verwijzen, mag je daar helemaal op maken.

De opgaven 11 t/m 20 gaan over figuren zoals deze:



Eerst is er een vierkant $PQRS$ getekend. Daarna is PQ aan beide kanten evenveel verlengd. Uit de eindpunten A en B zijn lijnen door S en R getrokken. Zo ontstond driehoek ABC.
Op de bijlage zijn de vierkanten 2 bij 2 cm.

(11) Zie bijlage.
Verleng PQ van dit vierkant aan beide kanten met de helft van PQ. Maak met wat je nu hebt, op dezelfde manier als hierboven een driehoek ABC.

12 Als je nauwkeurig gewerkt hebt, zie je dat jouw driehoek twee keer zo hoog is geworden als het vierkant. Dat komt doordat AP en BQ elk de helft van PQ zijn. Leg uit waarom in *dat* geval de hoogte van ΔABC tweemaal de hoogte van het vierkant is. (Het helpt als je de hoogte tekent.)

13 Bereken (dus niet meten!) de omtrek van ΔABC uit opgave 11 in één decimaal nauwkeurig.

(14) Zie bijlage
Verleng PQ van het vierkant aan beide kanten met stukken die even groot zijn als PQ. Maak de driehoek af.

15 Als je goed getekend hebt, is de driehoek van opgave 14 anderhalf keer zo hoog als het vierkant. Leg uit waarom dat zo moet zijn.

16 Bereken van deze driehoek de *oppervlakte*.

Uit: experimenteel C-examen lbo/mavo 1990

● Werkblad ●

▶ Driehoeken om een vierkant (2)

(17) Zie bijlage.
Verleng nu *PQ* aan beide kanten met het *dubbele* van de lengte van het vierkant.
Maak weer de driehoek af.

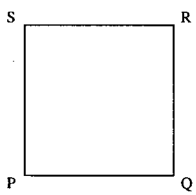
18 Is de oppervlakte nu *groter* of *kleiner* dan die van de twee vorige driehoeken?

19 Als je een heel groot tekenvel had, zodat je heel grote verlengstukken kon nemen, wat zou er dan met de hoogte van de driehoek gebeuren?

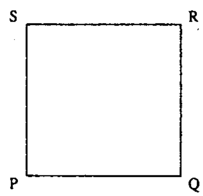
20 Denk je dat er om het vierkant *PQRS* zo'n ΔABC te tekenen is met een oppervlakte van 100 cm²?
Ja? Hoe lang en hoe hoog is die driehoek dan zo ongeveer?
Nee? Waarom kan het niet?

▶ Bijlage bij 'Driehoeken om een vierkant'

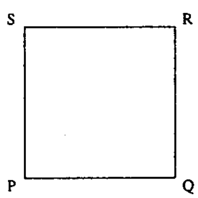
11



14



17



Uit: experimenteel C-examen lbo/mavo 1990

● Verenigingsnieuws ●

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

▶ Jaarrede 1990

Het gereedschap dat wiskundigen gebruiken is voornamelijk de zuivere denkwereld, waarmee volgens Hilbert ieder wiskundig probleem is op te lossen. Een bewijs moet een zekerheid geven zoals de wetten van Newton zekerheid brachten in de mechanica. Het is nog maar weinig jaren geleden dat wiskundigen ver achter liepen bij collega's biologie, natuurkunde, scheikunde en astronomie als het ging om publiekelijk duidelijk te maken dat hun vak nuttig en boeiend was en veel waarde had in het dagelijkse leven. Dankzij een grote groep didactisch getalenteerde wiskundedocenten is er in Nederland een grote sprong vooruit gemaakt bij het populairder maken van de wiskunde en het tot stand brengen van maatschappelijk georiënteerde wiskundeleerstof in onze klassen.

Hewet, Hawex en COW zijn respectievelijk in gevorderd, beginnend en prenataal stadium en getuigen van een nieuwe koers die moet afrekenen met de imago van de wiskunde die je kon of niet kon, maar die ogenschijnlijk weinig met de werkelijkheid te maken had. Wij moeten als wiskundedocenten er wel voor waken dat de slinger niet te ver doorzwaait en zorgen dat het gevoel van zekerheid dat een wiskundig bewijs of een wiskundige oplossing kan geven nog steeds bij de jeugd aangeleerd wordt.

Over de richting waarin het wiskundeonderwijs voor 12- tot 16-jarigen volgens de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) zal gaan veranderen, hebben we iets kunnen vernemen in de eerste serie hoorzittingen, die door de NVvW is georganiseerd. We hopen dat het concept examenprogramma mavo/lbo C/D grondig bekeken wordt, en dat men op de tweede serie bijeenkomsten duidelijk naar voren brengt wat er eventueel veranderen moet. Het bestuur zal uit de vrijwilligers die zich bij ons aanmelden om namens de NVvW een kritisch rapport of een alternatief programma op te stellen, een of meerdere werkgroepen samenstellen. Ondanks veel waardering voor de ontwerpers van de nieuwe ideeën moeten we als vereniging in het belang van het wiskundeonderwijs dat we voorstaan, eventueel een geheel onafhankelijk voorstel over de in te voeren vernieuwingen kunnen geven.

Het afgelopen mavo-lbo C/D-examen had 50% open- en 50% gesloten-vragen. Het bestuur heeft er in de vorige cursus voor gezorgd dat er een voorbeeld-examen is gemaakt en naar alle betrokken scholen is gestuurd. Zeer verheugend was het om te constateren, dat dit zo gewaardeerd is dat veel nieuwe leden uit het mavo en lbo onze gelederen zijn komen versterken. Eveneens verheugend is de weer toegenomen belangstelling voor de door de NVvW georganiseerde eindexamenbesprekingen van het mavo- en lbo-examen.

De NVvW stelt de ontwikkelingen in de projecten 'Wiskunde in het Beroepsonderwijs' (WIBO) en 'Ontwikkeling Wiskunde in het IBO' (OWI) zeer op prijs. Beide projecten gaan over het toegankelijker maken van wiskunde voor de zwakke lbo/ibo-leerlingen.

Het orgaan van de NVvW, het tijdschrift Euclides, heeft het afgelopen jaar een verandering ondergaan. Wij menen dat zowel de lay-out als de inhoud duidelijk verbeterd zijn. Redacteur G. Bulthuis heeft zijn werk voor de redactie beëindigd en wij willen hem hartelijk bedanken voor de vele positieve bijdragen die hij geleverd heeft.

Mede op verzoek van de NVvW is er gestart met nieuwe wiskundeprogramma's op het havo. Vertegenwoordigers van onze vereniging zijn opgeno-

men in de werkgroep. Na het voorlopige rapport zijn er door ons hoorzittingen in het hele land georganiseerd. Leden hebben naar aanleiding van die bijeenkomsten kritiek kunnen geven en voorstellen tot wijziging kunnen indienen. Ondanks een gebrekkige financiële ondersteuning door het ministerie heeft het ontwikkelteam veel werk verzet om te komen tot een goede startpositie voor de experimenterende scholen. Hoewel er aanvankelijk geen ruimte gegeven werd voor experimenten is mede op aandringen van de NVvW een kleine experimentele fase toegestaan. Voorlichtingsbijeenkomsten, ook voor lbo/mavo-docenten, zijn door ons georganiseerd. Toen bekend werd met welk aantal uren gewerkt moest worden, was ook voor leden die niet geëxperimenteerd hadden, duidelijk dat wijzigingen, vooral in het havo-B-programma, noodzakelijk waren. Een krachtig protest bij het ministerie, o.a. van onze vereniging, heeft er voor gezorgd dat op een speciaal daarvoor georganiseerde bijeenkomst diverse onderdelen tijdelijk 'in de ijskast' geplaatst zijn. Wij hopen dat de eerstvolgende examens zullen uitwijzen dat de programma's nu haalbaar zijn en dat de niet ideale aansluiting van havo-A naar vwo-A niet teveel problemen zal geven.

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde heeft twee landelijke studiedagen gehouden. In de eerste stonden de Hawex-ontwikkelingen centraal. De tweede werd in samenwerking met de werkgroep Vrouwen en Natuurwetenschappen van de NVON georganiseerd en ging over toetsen, beroepenoriëntatie en contexten. Het informatiecentrum van Vrouwen en Wiskunde voorziet in een behoefte, gezien de vele vragen om inlichtingen die daar binnenkomen.

Door het ministerie van onderwijs is een merkwaardig beleid gevoerd ten aanzien van de toelating tot de PABO. Onderzoeken naar rekenvaardigheid in het basisonderwijs hebben minister Deetman doen besluiten dat havo-kandidaten wiskunde in hun pakket moeten hebben om toegelaten te kunnen worden tot de PABO. Zowel de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs (NVORWO) als de NVvW juichten de zorg van de minister voor goed rekenonderwijs toe. Zij adviseerden de minister echter, de toelatingseis pas te stellen op het moment dat de kandidaten wiskunde-A zouden kunen kiezen. De minister heeft niet gewacht op de invoering van wiskunde-A. De huidige staatssecretaris de heer Wallage heeft in verband met een dreigend tekort aan leraren bij het basisonderwijs besloten de toelatingseis van wiskunde voor de PABO weer in te trekken, N.B. juist bij de invoering van wiskunde-A in het havo! Ondanks de rekenvaardigheidscursussen die de staatssecretaris voor de PABO-studenten wil laten geven, vrezen wij met de NVORWO dat een aantal afgestudeerden van de PABO een ontoereikend niveau zal hebben om het vak rekenen/wiskunde op de basisschool op verantwoorde wijze te onderwijzen. De vraag rijst of de staatssecretaris bij een gebrek aan badmeesters, de verplichting de zwemkunst meester te zijn voor badmeesters zal laten vervallen.

Bij wiskunde-A in het vwo wordt een behoorlijke portie nuttige, niet eenvoudige statistiek behandeld. Helaas is gebleken dat het verzinnen van vraagstukken op leerlingenniveau tot problemen heeft geleid b.v. ten aanzien van de afhankelijkheid van gebeurtenissen. De werkgroep Interpretatie Eindexamenprogramma wiskunde-A vwo (de WIEWA) hoopt dit cursusjaar rapport uit te brengen over de onderdelen Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek. Tijdens de vergaderingen van deze werkgroep is gebleken dat er in de diverse leerboeken tekortkomingen zijn aan te wijzen. Mede doordat er onvoldoende nascholingsactiviteiten bij de invoering van de nieuwe Statistiek in het vwo zijn geweest heeft de NVvW de staatssecretaris gevraagd om een gesprek met het ministerie over deze kwestie. We hoopten dat naast het starten van nascholingsactiviteiten, een vakstatisticus voor een gedeelte van zijn weektaak vrijgemaakt kon worden om hulp te bieden bij deze problematiek. Enkele dagen geleden liet de staatssecretaris weten dat hij het weinig opportuun acht met ons over de statistiek in het vwo te praten omdat zoiets niet op zijn weg ligt. Hij vindt het een taak voor de nascholingsinstellingen en de educatieve uitgeverijen. Erg merkwaardig, aangezien wij slechts een gesprek met het ministerie gevraagd hadden. Kennelijk is daar niemand vrij te maken om over deze belangrijke zaak te praten. Helaas blijkt daaruit

hoe weinig de minister zich interesseert voor onderwijskundige zaken.

Van de projectgroep PRINT weten we inmiddels dat de experimenten met Automatische Gegevens Verwerking (AGV) goed verlopen zijn. Zij stelt voor om over enige jaren als keuzeonderwerp bij wiskunde-A in het vwo het vernieuwde AGV te nemen. Voor de concrete invulling zou gekozen moeten worden uit Statistiek op Relationele bestanden, Dynamische simulatie of Informatie en Modellen. Het bestuur is van mening dat het mogelijk is met zo'n onderwerp de AGV weer nieuw leven in te blazen, maar vindt eigenlijk dat eerst meer leden de kans moeten krijgen, eventueel privé op eigen p.c., het pakket met de bijbehorende software te beoordelen. Wij verzoeken belangstellenden zich hiervoor bij onze secretaris op te geven en hopen dat zij ons dan na enige tijd verslag uitbrengen van hun bevindingen. Het bestuur zal daarna onderzoeken of we als vereniging het keuzeonderwerp in de aangeboden vorm moeten aanbevelen bij het ministerie.

Op 16 juli 1990 waren de laatste mondelinge examens l.o.-wiskunde. Het tijdperk van deze examens is afgelopen en het is goed even te memoreren dat veel van onze leden hun carrière begonnen zijn met de l.o.-akte. Ook voor diegenen die de examens hebben afgenomen eindigt een belangrijke periode van werk ten behoeve van het wiskundeonderwijs.

De prijsvraag uitgeschreven door de NVvW in samenwerking met de NVORWO over originele ontwerpen van didactische nieuwe lesmethoden, heeft helaas maar weinigen van de ongetwijfeld vele anonieme ontwerpers naar de pen doen grijpen. De jury bestudeert de zes inzendingen en wij wachten hun oordeel af, alvorens met de NVORWO te beslissen of, en zo ja hoe, we weer zo'n prijsvraag uit zullen schrijven.

Als voorzitter van de VALO wiskunde en Informatica is benoemd Dr. Ir. P. Terlouw. Hij volgde Dr. S. Kemme op, die op eigen verzoek de functie neerlegde. Voor het vele goede werk verricht bij de VALO willen we de heer Kemme nog hartelijk dank zeggen.

Zoals velen al opgemerkt hebben beschikt onze vereniging nu over een eigen beeldmerk. Wij willen iedereen die ideeën heeft aangedragen voor een logo hartelijk bedanken voor de hulp.

Veranderingen zullen in het wiskundeonderwijs blijven komen: brugklassers zullen met andere reken-/wiskunde-kennis en attitude van de basisschool komen, het nieuwe programma voor de onderbouw zal zowel hierop, als op de vernieuwde havo- en vwo-programma's moeten aansluiten, hetgeen ook een mogelijke vernieuwing van de mbo wiskundeprogramma's met zich mee zal brengen; de invloed van de computer wordt groter; de tweede correctie is in discussie enz. enz.
De NVvW zal examenbesprekingen, hoorzittingen en voorlichtingsbijeenkomsten blijven organiseren. Wij zullen veranderingen op de voet blijven volgen en met hulp van onze leden trachten bij te sturen overal waar dat nodig mocht zijn. Noch politici noch ontwerpers of auteursgroepen zullen de kans mogen krijgen veranderingen door te drukken die we niet zinvol vinden.

Bij deze doe ik een beroep op uw deskundigheid om reacties aan Euclides of aan het bestuur op te zenden, eventueel in een van de commissies plaats te nemen en, waar mogelijk te helpen leden te werven.

Onze protesten bij het ministerie of bij werkgroepen zullen des te meer gewicht hebben, naarmate wij meer mensen uit alle geledingen vertegenwoordigen.

▶ Notulen jaarvergadering 1990

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 27 oktober 1990 in het gebouw van het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Om 10.09 uur opent de voorzitter, dr. J. van Lint, de vergadering. Hij verwelkomt alle aanwezigen en in het bijzonder de ereleden dr. J. van Dormolen, dr. Th. Korthagen en E. H. Schmidt, de inspecteurs drs. W. Kleijne, dr. J.C. Nijenhuis en dr. J. Vedder, de vertegenwoordiger van de NVORWO W. Uittenbogaard, de vertegenwoordiger van de NVON mevr. S. Steekelenburg, de oud-voorzitter van de COW prof. dr. F. van der Blij, de redactie van Euclides met hun voorzitter drs. A. Oosten, de organisator en de sprekers van de studiedag L. Bozuwa, prof. dr. J. J. Duistermaat en prof. dr. ir. H. C. A. van Tilborg.

De voorzitter deel mee dat dr. P. G. J. Vredenduin, erelid van de vereniging die reeds tientallen jaren bij de vereniging behoort en veel gedaan heeft voor de vereniging en Euclides, door ziekte verhinderd is de vergadering bij te wonen. Hij wenst hem een algeheel herstel toe.

Prof. dr. H. Freudenthal, eveneens erelid, is op 13 oktober plotseling overleden. De voorzitter memoreert hem als een groot, zeer veelzijdig wiskundige die de laatste twintig jaren veel voor de didactiek gedaan heeft. Zijn uitgangspunt was: wiskunde leer je door het te doen. Hij gaf injecties aan de vernieuwing van het wiskundeonderwijs en was oprichter van het IOWO. Hij was een docent voor de docenten. Staande gedenkt de vergadering prof. Freudenthal.

Hierna spreekt de voorzitter de jaarrede uit.

Namens het bestuur stelt de voorzitter de vergadering voor prof. Van der Blij tot erelid te benoemen. Prof. Van der Blij heeft veel voor het wiskundeonderwijs gedaan. Hij heeft nu zijn werkzaamheden in de COW beëindigd. Altijd was hij bereid de colleges wiskunde voor economen en biologen te verzorgen, waarbij hij wiskunde toegankelijk maakte voor velen. Bij acclamatie besluit de vergadering dit erelidmaatschap te verlenen. Prof. Van der Blij aanvaardt het erelidmaatschap met veel vreugde en dankbaarheid. Hij vindt het een verzuim van zichzelf dat hij nooit lid van de vereniging is geworden. Door het erelidmaatschap heeft de vereniging zijn verzuim gecorrigeerd.

Hierna worden de notulen van de algemene vergadering van 28 oktober 1989 en de jaarverslagen goedgekeurd. Het verslag van de kascommissie wordt voorgelezen, waarna de penningmeester wordt gedechargeerd met dank voor het vele verrichte werk. Daar er geen tegenkandidaten zijn worden zonder stemming in de kascommissie benoemd mevr. drs. Th. J. de Poel uit Amsterdam en de heer T. Vandeberg uit Kerkrade.

De voorzitter gaat hierna over tot de bestuursverkiezing. Er zijn geen tegenkandidaten ingediend zodat de verkiesbare, aftredende bestuursleden mevr. H. Goemans-Wallis en de heren C. Th. J. Hoogsteder en drs. J. W. Maassen zonder stemming worden herkozen. De voorzitter deelt mee dat het bestuurslid J. F. D. Diepstraten kenbaar gemaakt heef zijn bestuurslidmaatschap te willen beëindigen daar zijn gezin met een drieling is uitgebreid. De voorzitter dankt de heer Diepstraten voor het werk dat hij voor het bestuur gedaan heeft en deelt mee dat het bestuur heeft besloten de omvang van het bestuur voorlopig tot negen bestuursleden te beperken.

Het volgende agendapunt is de contributie voor het jaar 1991/1992. Deze wordt wederom vastgesteld op *f* 55,–.

Namens mevrouw Vredenduin brengt de penningmeester de dank over voor de vele bezoeken en kaarten die haar man heeft ontvangen.

Hierna sluit de voorzitter het morgengedeelte van de jaarvergadering en geeft voor het themagedeelte het woord aan de heer L. Bozuwa.

Na de studiedag wordt om 16.20 uur de jaarvergadering heropend voor de rondvraag. Als eerste merkt de heer J. Epping op dat na de lunch zeer veel plastic overbleef. Hij vraagt dit in het vervolg te voorkomen. De voorzitter belooft hier volgend jaar op toe te zien. Ook de penningmeester is het eens met de opmerking maar merkt op dat er vorig jaar ook tegen de kartonnen dozen bezwaren zijn gemaakt.

Vervolgens stelt de heer J. J. Sloff een reeds tevoren ingediende vraag: 'In contacten met studenten die aan buitenlandse universiteiten studeren in het kader van het Erasmusprogramma vernam ik dat er nog wel eens problemen waren met de studie, die deels voortkwamen uit de voorbereiding op de middelbare school, deels uit een andere meer gedisciplineerde manier van werken en voorbereiden op examens dan men gewend is in het Nederlandse onderwijs. Hierbij werd ook het wiskundeonderwijs op de middelbare school genoemd. In het kader van de Europese integratie zal het Erasmusprogramma zeer belangrijk zijn voor Nederlandse studenten en voor de plaats die Nederland zal innemen in de EEG. De vraag is: garandeert het vwo-programma wiskunde-B resp. wiskunde-A in vergelijking met buitenlandse (met name Duitse, Franse en Belgische) programma's voldoende voorbereiding om een deel van de studie aan een buitenlandse (Duitse, Franse, Belgische) universiteit te kunnen verrichten? Zover mij bekend is er hier nog geen onderzoek naar gedaan, maar zijn de ervaringen niet positief. Ik stel u voor dat u de minister van onderwijs op de wenselijkheid van een dergelijk onderzoek attendeert, dan wel dat u zelf het initiatief neemt voor een onderzoek naar aard en inhoud van het Nederlandse wiskundeonderwijs (met name havo/vwo) in vergelijking tot het Duitse, Franse, Belgische en de eventuele gevolgen van geconstateerde verschillen voor Nederlandse studenten in het kader van een Europese integratie.' De voorzitter informeert of er mensen in de zaal zijn die hierover iets meer weten. Het blijkt dat het Erasmusprogramma voor tweede en hogerejaars studenten is zodat er in eerste instantie een probleem voor de universiteiten ligt.
De heer drs. H. G. B. Broekman voegt hier nog aan toe dat wij in Nederland op grotere doelgroepen mikken dan in het buitenland en hierdoor de leerlingen minder leren zich in te spannen.

Mevr. drs. G. W. Fokkens deelt mee dat leerlingen graag een tabellenboek als BINAS zouden gebruiken voor onder andere gonioformules; tevens vraagt zij of leerlingen bij het keuzeonderwerp correlatie en regressie in wiskunde A-vwo geacht worden formules te kennen. De voorzitter deelt mee dat de inspectie zich reeds bezighoudt met de mogelijkheid van het gebruik van

een tabellenboek. Als vereniging zullen wij de CEVO verzoeken om bij correlatie en regressie formules te geven.

De heer Sloff heeft de vraagstukken van de tweede ronde van de wiskundeolympiade ontvangen maar nog niet de opgaven van de internationale olympiade in China. Hij vraagt de publikatie te bespoedigen. Ook vindt hij de belangstelling voor de olympiade klein en vraagt de vereniging deze te bevorderen. De voorzitter zal het verzoek aan Euclides doorgeven en zegt toe na te denken over bevordering van de belangstelling.

De heer W. van Koers refereert aan de eindexamenresultaten wiskunde-B vwo. De inspectie stuurt regionale cijfers naar de scholen. Hij stelt het op prijs als aan de schoolleidingen meegedeeld wordt hoe schoolonderzoeksresultaten ten opzichte van landelijke examencijfers moeten worden geïnterpreteerd. Tevens vraagt hij of het mogelijk is dat het Cito de examenresultaten naar gebruikte leergang uitsplitst.

Mevr. J. L. M. Mol-v.d. Koogh dankt alle actieve leden van de vereniging. Voor de ƒ55,– contributie krijgen de leden zeer veel in de vorm van Euclides, studiedagen en examenbesprekingen. Zij stelt het op prijs als de examenbesprekingen nog meer bezocht zullen worden om problemen bij eerste en tweede correctie te voorkomen. De voorzitter dankt voor de opmerkingen.

Mevr. A. Aukema-Schepel vraagt naar aanleiding van de vraag over de lunch of de leden bereid zijn zelf de lunch op de jaarvergadering mee te brengen. De grote meerderheid van de aanwezigen is hiertoe bereid.

De heer J. B. v.d. Groep is soms verhinderd examenbesprekingen bij te wonen en vraagt of men op verzoek een verslag toegezonden kan krijgen. De voorzitter suggereert dat hij dan iemand in zijn omgeving vraagt een verslag voor hem mee te brengen. Hoewel de regionale bijeenkomsten op een centrale bijeenkomst worden voorbereid, bestaat toch de mogelijkheid dat op diverse bijeenkomsten de afspraken niet geheel gelijk zijn. De secretaris deelt nog mee dat hij slechte ervaringen heeft met het op schrift stellen van de gemaakte afspraken. De indruk kan dan bestaan dat de vereniging eigen normen gaat maken.
Mevr. Mol vraagt de examenbijeenkomsten niet alleen in Euclides te vermelden maar ook bericht aan de scholen te zenden. De penningmeester deelt mee dat de mededeling aan alle onderwijsbladen wordt toegezonden.

Aan het eind van de rondvraag dankt de voorzitter de sprekers prof. Duistermaat en prof. Van Tilborg en de leiders van de werkgroepen voor de geslaagde themadag. Hij dankt alle mensen van de school en de penningmeester en zijn vrouw voor de goede organisatie van de dag en bovenal de heer Bozuwa die de leiding had over de studiedag.
Hierna sluit hij om 16.38 uur de jaarvergadering.

▶ Studiedag 27 oktober 1990

Victor Schmidt

Voorzitter Hans van Lint sprak na afloop van een geslaagde studiedag. Gemeten naar het aantal deelnemers was dat terecht; ruim 200 leraren wiskunde hadden de weg gevonden naar het Nieuwe Lyceum in Bilthoven om gezamenlijk van gedachten te wisselen over aansluitingsproblematiek tussen schoolsoorten of zelfs binnen een schooltype.

De studiedag was zoals elk jaar ingebed in de officiële jaarvergadering van de vereniging. De dag begon dan ook met een huishoudelijk gedeelte, waaar onder meer prof. Hans Freudenthal staande met een minuut stilte werd herdacht. Tot erelid werd prof. Van der Blij benoemd, tot voor kort voorzitter van de COW en directeur van het OW & OC. Met de aanvaarding van het erelidmaatschap meende hij een verzuim goed te kunnen maken: hij was nog geen lid van de NVvW.

Het eigenlijke themagedeelte had een afwisselende opzet: twee lezingen die elk werden gevolgd door een tiental keuzegroepen.
De inleiding tot het thema was voor rekening van prof. Duistermaat uit Utrecht. Hij was tot voor kort – evenals Van der Blij – geen lid van de vereniging. Toen hij zich als – gewoon – lid aanmeldde werd hij meteen gevraagd deze inleiding te houden. In een verrassend korte toespraak vertelde hij dit

verhaal en wenste hij de deelnemers vervolgens een geslaagde studiedag toe.

In de keuzegroepen kwamen diverse aansluitingsproblemen aan de orde. De emoties konden er hoog oplopen, zeker als een inleider zich uitliet in de toon van 'Ze kunnen nog niet eens. . .'. De terechte vraag waar omissies van dit soort dan weggewerkt moeten worden, leidden nogal eens tot interessante discussies. Ook het gebrek aan aansluiting tussen wiskunde A op Havo en Vwo enerzijds en sommige vormen van het vervolgonderwijs anderzijds schoot een enkele deelnemer in het verkeerde keelgat, zeker in die groep waar de inleiders uit het vervolgonderwijs stelden dat het aanleren van algoritsmische vaardigheden hoofddoel van hun wiskunde-onderwijs is.
Door inleiders uit het wetenschappelijk en beroepsonderwijs werd de klacht geuit dat studenten/leerlingen hen aangeleerde algoritmen te zeer klakkeloos toepassen, bijvoorbeeld in die gevallen waarbij een alternatieve oplossingsmethode sneller en eenvoudiger resultaat oplevert. Het werken in contexten kan studenten/leerlingen helpen meer hun verstand te gebruiken. In één van de groepen kwam deze hoopgevende opgave aan de orde: Met een schip worden 20 koeien en 30 schapen vervoerd, hoe oud is de kapitein? Zonder mankeren geven nadenkende leerlingen op deze contextvraag het juiste antwoord: 50 jaar!
De bijeenkomsten van de keuzegroepen basisonderwijs – voortgezet onderwijs en COW vielen wat tegen. Het thema aansluitingsproblematiek werd in die groepen niet voldoende belicht.

De middagpauze had zoals elk jaar weer een reünieachtig karakter. In de aula werd een video-presentatie getoond van de studierichting Toegepaste Wiskunde in Eindhoven, welke presentatie tevens verkrijgbaar was. 's Middags liepen er opvallend veel deelnemers rond met een videoband op zak.

De middaglezing met als onderwerp 'Discrete Wiskunde' had niet direct met het thema van de dag van doen. Prof. Van Tilborg uit, alweer Eindhoven, besprak een drietal problemen die met behulp van deze tak van wiskunde kunnen worden opgelost. Dat twee van deze problemen uit de Informatica afkomstig zijn, zal niemand verbaasd hebben. Ze hadden betrekking op het lezen van digitale informatie van een floppy disk of magneetband en op het constateren van fouten bij datacommunicatie. Dat laatste probleem illustreerde Van Tilborg aan de hand van een computerprogramma, waarvan de uitvoer geprojecteerd werd met behulp van een transview. Helaas liet de leesbaarheid nogal te wensen over.
Als derde probleem behandelde de spreker een zogenaamd toewijzingsprobleem; vijf docenten moesten aan even zoveel klassen gekoppeld worden als de voorkeur van elke docent voor bepaalde klassen en omgekeerd gegeven is. Het probleem werd met de zogenaamde Hongaarse methode opgelost; deze methode bleek echter weinig meer voor te stellen dan een veredelde vorm van trial-and-error. Hoe lang zou een computer werk hebben als er 100 docenten zijn die op deze manier aan 100 klassen moeten worden toegewezen?

Tegen het eind van de dag was er gelegenheid het bestuur een aantal zaken onder de aandacht te brengen in de rondvraag. Een ruime verscheidenheid aan vragen werd uit de inmiddels half lege zaal gesteld, variërend van de vraag waarom er zoveel plastic tijdens de lunch werd gebruikt tot de vraag of het gebruik van formulebladen op het Vwo-examen bevorderd moet worden. Op veel van de vragen antwoordde het bestuur met de bijna-standaardfrase 'We nemen het mee in onze besprekingen'.
Tegen vijf uur sloot Van Lint de Studiedag annex jaarvergadering en complimenteerde hij Leen Bozuwa met het welslagen van de studiedag. Een ieder keerde met zijn of haar gedachten huiswaarts. Of deze gedachten 'troostrijk' geweest zullen zijn – zoals eerder op de dag door Leen Bozuwa als hoop uitgesproken – blijft de vraag.

▶ Aansluitingsproblemen die aan de universiteit ervaren worden*

J. J. Duistermaat

Ik behoor tot de generatie van hen voor wie het leraarschap de meest waarschijnlijke baan na de studie was. Tot mijn eigen verrassing aan de universiteit gebleven, verdween het middelbaar onderwijs vervolgens voor mij volledig uit het zicht. Er is ook geen enkel officieel contact meer, zoals dat bijvoorbeeld ooit nog bestond in het bijwonen van de eindexamens door de 'gecommitteerden'.

Dat er intussen veranderingen in het vwo plaatsvonden, merkte ik zo'n 15 jaar geleden op indringende wijze. Een beginnende student vroeg mij verbaasd waarom ik toch maar alles wilde bewijzen, dat was toch volkomen ouderwets in het wiskundeonderwijs? Ik was met stomheid geslagen over deze ontkenning van de ruggegraat van de wiskunde.
We hebben aan de universiteit uiteindelijk geaccepteerd dat de studenten inderdaad hun indrukwekkende vwo-programma hebben doorlopen zònder bewijzen en besteden daarom hier speciale aandacht aan in het begin van de studie. We doen dit met liefde en overtuiging, al maakt het dat we in het eerste semester niet erg toekomen aan de behandeling van spannende nieuwe verschijnselen.

Een volgende schok was de dramatische afname van de belangstelling bij de studenten om leraar te worden. Eerst was de verklaring dat andere beroepen zich als aantrekkelijke alternatieven aandienden, maar echt verontrustend werd het toen vrijwel alle studenten begonnen te verklaren dat ze niets in het leraarschap zagen. Dat ging mij aan mijn hart omdat ik, al is het aan de universiteit, me toch ook onderwijzer voel. Tegen de stroom in, blijven we de mooie en uitdagende kanten van het leraarschap aanprijzen.

Een heel andere zorg voor ons is dat de laatste jaren het aantal studenten in de wiskunde naar een ongezond laag niveau is gezakt, in een tijd dat het totaal aantal studenten nog steeds groeit, zowel aan de universiteiten als in het hbo. Eén oorzaak is de concurrentie van talrijke vakken met een spectaculair imago, zowel wetenschappelijk als maatschappelijk. In vergelijking daarmee lijkt de wiskunde bij het publiek over te komen als een vak dat er ís ('af' en statisch) en wel als plichtvak dat je nodig hebt als je een van die andere interessante vakken wilt gaan doen. Dat wiskunde ook zelf een levend vak is, met nieuwe ontwikkelingen, en dat we mensen nódig hebben die hieraan actief deelnemen, lijkt nauwelijks bekend te zijn. Hier proberen we onder andere wat aan te doen door alle 5e-klassers van het vwo uit te nodigen om op 13 april bij ons op de themadag te komen kijken, waar de nadruk ligt op het speelse en onderzoekende karakter van de wiskunde.

Alles bij elkaar was het hoog tijd voor mij om kennis te maken met de wiskundeleraren. Ik deed dit eerst op individueel niveau, maar dan blijven de ervaringen toch wat anekdotisch. Totdat enkele collega's mij er zoetsappig op wezen dat er diverse landelijke organisaties zijn, zoals uw Vereniging met het blad Euclides. Kun je nagaan hoe ver de verwijdering intussen was voortgeschreden dat ik daar niet eens uit mezelf op kwam! Terwijl ik mij als lid opgaf heb ik tegelijkertijd een brief aan uw voorzitter geschreven waarin ik mijn zorgen probeerde te verwoorden.

Een beetje tot mijn schrik kreeg ik als antwoord de uitnodiging om meteen maar als inleider van deze studiedag op te treden, alsof ik een Autoriteit in

Aansluitingsproblemen zou zijn! Wél zeer vererend en een ideale gelegenheid om nader met u in gesprek te komen. Maar ook met het risico dat het averechts werkt, want u zit natuurlijk niet te wachten op zo'n universitaire betweter die wel even weer zal vertellen wat er allemaal aan het wiskundeonderwijs mankeert. En al helemaal om te horen hoe het dan wél zou moeten van iemand die zelf geen leraar is en dus nauwelijks weet heeft van de veelheid van problemen waarmee u dagelijks in het middelbaar onderwijs wordt geconfronteerd.

Nu was ik niet van plan om een klaagzang aan te heffen over het huidige middelbaar onderwijs, noch om het vroegere te verheerlijken. Ook vroeger kwam er vaak niet zoveel terecht van de hoogstaande doelstellingen, ondanks het zoveel selectere gezelschap leerlingen van toen.
Verder ben ik echt onder de indruk van de vele verbeteringen en vernieuwingen in het onderwijs die met vallen en opstaan worden gerealiseerd. Ik denk bijvoorbeeld aan 'wiskunde A' of 'computergebruik bij het onderwijs' of 'W 12-16, wiskunde van en voor 12- tot 16-jarigen' of de vele geavanceerde onderwerpen in het wiskunde B-programma.

Dit gezegd zijnde, wilde ik echter toch graag een probleem signaleren met het huidige wiskundeonderwijs, dat verband houdt met zowel de verdwenen bewijzen, als ook met het eenzijdige beeld van de wiskunde als hulpvak. Of dit alleen of vooral geldt voor wiskunde B weet ik niet, maar het lijkt erop dat middelbare school-wiskunde vooral bestaat uit een collectie van rekenregels die min of meer op de automatische piloot moeten worden toegepast. *Begrip* lijkt daarbij op de tweede plaats te staan en er staat géén premie op de eigen, originele oplossing die in de gegeven situatie misschien zelfs eenvoudiger is dan de standaardprocedure. Ook voor reflectie, het nog eens op een andere manier naar een probleem of methode kijken, lijkt weinig ruimte te zijn. Tot mijn verrassing bleek bij de voorbespreking voor deze studiedag dat dit probleem door de contactpersonen van álle keuzegroepen, zij het in telkens wat andere vorm, werd gesignaleerd. Niemand vroeg om een uitbreiding van de leerstof, allen pleitten voor begripsmatig beter verwerken van datgene wát aangeboden wordt.

Begrijp me niet verkeerd. De slogan 'meer ruimte voor begrip in de wiskunde' betekent niet dat we het oefenen in wiskundige technieken, zoals het oplossen van lineaire vergelijkingen, onder één noemer brengen, etc. moeten verwaarlozen. Niet alleen dat zulke technieken broodnodig zijn voor iedereen die wiskunde doet, ze vergemakkelijken het leven aanzienlijk als men ze goed beheerst. Er gaat een grote bevrediging uit van het systematisch uitwerken van een opgave. Zowel de leerlingen als hun latere docenten of werkgevers zullen u zeer dankbaar zijn voor ieder grondig aangeleerde techniek. Maar die blijft des te beter bij als men haar ook goed begrepen heeft en liefst op verschillende niveaus er op teruggekomen is, zodat men ze in allerlei situaties kan herkennen en toepassen. Beter een paar die men echt goed beheerst en als een opstapje naar de volgende kan gebruiken, dan een hele collectie waarvan men eigenlijk nooit het fijne heeft begrepen...

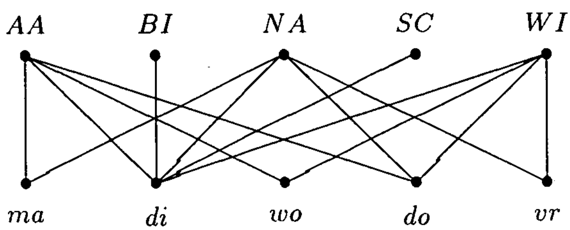
U zult gemerkt hebben dat ik geen concrete voorbeelden heb genoemd, ik laat die graag over aan de keuzegroepen! Ik dank u zeer voor uw aandacht.

* Inleidende voordracht op de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, gehouden op 27 oktober 1990.
De inleider is verbonden aan het Mathematisch Instituut van de R.U. Utrecht.

De Hongaarse methode*

Henk C. A. van Tilborg

Op uw school wilt u op vijf opeenvolgende dagen een extra les organiseren met als onderwerp: 'Informatica alom'. U heeft vijf leraren bereid gevonden om elk een zo'n uur te geven. Het zijn de leraren aardrijkskunde, biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde. Deze docenten zijn echter niet elke dag aanwezig op uw school. Onderstaand schema geeft hun aanwezigheid aan.



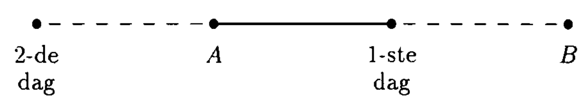
Beschikbaarheidsschema

Het is niet zo moeilijk in te zien dat er voor het roosterprobleem geen oplossing is, want zowel de biologie- als scheikundeleraar kunnen alleen maar op dinsdag, of anders gezegd voor de maandag, woensdag, donderdag en vrijdag zijn maar drie leraren beschikbaar.

Ook als er op dezelfde wijze een groter aantal lessen verzorgd zou moeten worden (door een groter aantal leraren) zal het maken van een rooster duidelijk niet mogelijk zijn als

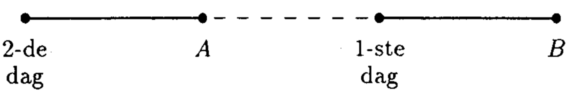
er een dag is, waarop geen leraar kan,
er twee dagen zijn, waarop slechts één leraar kan
er drie dagen zijn, waarop slechts twee leraren kunnen, etc...

Anders gezegd: als er een k-tal dagen is waarvoor maar hoogstens k - 1 leraren beschikbaar zijn, zal er geen oplossing gevonden kunnen worden. Merkwaardig genoeg, geldt ook het omgekeerde van deze bewering: als voor elke k dagen, tenminste k leraren ingeroosterd kunnen worden, is een totaal-oplossing te realiseren. Deze bewering staat bekend als de stelling van König-Hall.
Het standaardbewijs van deze stelling is niet constructief en geeft ook weinig extra inzicht in de materie. Wel is er een algoritme, dat op het beschikbaarheidsschema kan worden toegepast en dat ofwel met een totaal-oplossing komt ofwel aangeeft voor welke dagen te weinig leraren beschikbaar zijn (in dit geval is er dus geen oplossing). Dit algoritme staat bekend als de *Hongaarse methode.*
Het idee is als volgt. Begin met een leraar op de 1-ste dag in te roosteren (als dat niet lukt, is er blijkbaar een dag, waarop geen één leraar kan en is er dus geen oplossing). Noem deze leraar A. Aldus hebben we een eerste deeloplossing van het roosterprobleem.
We gaan nu proberen op de 2-de dag een leraar in te roosteren. Als er voor deze dag geen leraren beschikbaar zijn, is er wederom geen oplossing. Als er een andere leraar dan A beschikbaar is, wijzen we deze toe aan de 2-de dag. Is alleen A op deze 2-de dag beschikbaar, dan zijn er twee mogelijkheden: ofwel ook op de 1-ste dag was alleen A beschikbaar (er zijn nu twee dagen met maar één leraar; er is dus geen oplossing), ofwel op de 1-ste dag is ook een andere leraar beschikbaar, zeg B.
Deze laatste mogelijkheid kan als volgt aangegeven worden.



Een pad tussen de 2-de dag en B

Hierbij duidt een stippellijn aan dat de corresponderende verbinding niet in de deeloplossing zit, maar wel als verbinding beschikbaar is, en duidt een vaste lijn aan dat de corresponderende verbinding wel in de deeloplossing zit. Het plaatje hierboven is een voorbeeld van een zgn. vergrotend wisselpad. Een *wisselpad* is een pad (langs verschillende punten), waarvan de lijnen afwisselend niet en wel in de deeloplossing zitten. Een *vergrotend wisselpad* is een wisselpad, dat begint èn eindigt in een punt dat nog niet in de deeloplossing zit. Duidelijk is dat zo'n vergrotend wisselpad een oneven lengte moet hebben. Het vergrotend wisselpad hierboven duiden we kortweg aan met '2 . . *A* – 1 . . *B*'.
Door nu in zo'n vergrotend wisselpad de lijnen, die in de deeloplossing zitten, uit die deeloplossing te halen en de andere lijnen in het wisselpad aan die deeloplossing toe te voegen, verkrijgen we



Na uitwisseling

een grotere deeloplossing, die alle reeds eerder betrokken dagen en leraren omvat.
Als we dit algoritme toepassen op het beschikbaarheidsschema van het begin krijgen we als eerste deeloplossing '*ma* – *AA*'. Deze wordt in de tweede stap uitgebreid met '*di* – *BI*'. In de derde stap vinden we geen eenstaps uitbreiding, maar wel het vergrotend wisselpad '*wo* . . *AA* – *ma* . . *NA*'. Dit veranderen we dus in '*wo* – *AA* . . *ma* – *NA*'. Dit geeft samen met '*di* – *BI*' de grotere deeloplossing '*ma* – NA', '*di* – *BI*', '*wo* – *AA*'.
In de vierde stap wordt de huidige deeloplossing simpelweg uitgebreid met '*do* – *WI*'.
In de volgende stap lopen we vast. Vanuit *vr* vindt men na enig zoeken alleen drie wisselpaden i) '*vr* . . *WI* – *do* . . *AA* – *wo*', ii) '*vr* . . *WI* – *do* . . *NA* – *ma* . . *AA* – *wo*' en iii) '*vr* . . *NA* – *ma* . . *AA* – *wo* . . *WI* – *do*'. Niet alleen zijn dit geen vergrotende wisselpaden, we zien ook dat de 'dagen' op deze wisselpaden, *ma*, *wo*, *do*, *vr*, alleen verbonden zijn met de leraren *AA*, *NA* en *WI*. Voor deze vier dagen zijn dus maar drie leraren beschikbaar. Er is dus om deze reden geen oplossing voor dit schema.

Bovenstaande redenering geldt in zijn algemeenheid. Als het algoritme aan een deeloplossing een nieuwe dag *d* wil toevoegen, zal er ofwel een vergrotend wisselpad vanuit *d* te vinden zijn (die leidt tot een grotere deeloplossing) ofwel vanuit *d* vertrekken alleen wisselpaden van even lengte. In dit laatste geval zullen er meer dagen op al deze paden liggen dan leraren. We hebben dus een groepje dagen gevonden (waaronder *d*) waarvoor te weinig leraren beschikbaar zijn. Er is dus geen oplossing voor dit schema.

Referentie:

Cursus Discrete Wiskunde, Leereenheid 14 in Deel 2, Open Universiteit, Heerlen, 1990.

* Deel van een voordracht, gehouden op 27 oktober 1990 op de studiedag van de N.V.v.W. De inleider is verbonden aan de T.U. Eindhoven en aan de Open Universiteit.

Mededeling

Rectificatie

In de bijdrage 'Probleemoplossen en het Wiskunde-onderwijs' van W. P. van den Brink (Euclides jg. 66, nr. 4) is, na correctie van de drukproeven door de auteur, het woord graph vervangen door het wat ongelukkige woord graf. De bedoeling was om 'graph' te vervangen door 'graaf'. Excuses aan de auteur voor deze ingreep.

De redactie

▶ De XXXIe Internationale Wiskunde Olympiade 1990

J.G.M. Donkers

De 31e Internationale Wiskunde Olympiade werd gehouden van 8 tot 19 juli in Beijing (Peking), China. Er waren 308 deelnemers uit 54 landen waaronder 47 landen met een volledige ploeg van 6 deelnemers.
De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen:

Quintijn Puite	(18)	Wageningen
René Sitters	(18)	Heerhugowaard
Ronald de Man	(18)	Strijen
Raimondo Eggink	(17)	Wijchen
Melvin Koppens	(17)	Helmond
Erjen Lefeber	(17)	Zoetermeer

Ronald behaalde een tweede prijs, René en Melvin een derde prijs. Quintijn en Raimondo ontvingen een oorkonde met een eervolle vermelding. (Degenen die buiten de prijzen vallen maar wel voor tenminste één opgave 7 punten hebben behaald, krijgen een eervolle vermelding.)

Op 12 en 13 juli was de wedstrijd in het Beijing Language Institute. De deelnemers kregen op beide dagen $4\frac{1}{2}$ uur voor drie opgaven. Vier deelnemers behaalden de maximale score van 42 punten. Aan 155 deelnemers werd een prijs (medaille + oorkonde) uitgereikt, 23 goud (34 t/m 42 punten), 55 zilver (23 t/m 33 punten) en 77 brons (16 t/m 22 punten). In het officieuze landenklassement werd China eerste met 230 punten gevolgd door de Sovjet-Unie en de Verenigde Staten met resp. 193 en 174 punten. Nederland kwam op de 29e plaats met 90 punten. Onder de deelnemers bevonden zich ongeveer 20 meisjes (1 × goud, 2 × zilver, 3 × brons). Een bijzondere prestatie leverde het Russische meisje Evgenia Malinnikova: zij behaalde voor de tweede achtereenvolgende keer een gouden medaille, het vorige jaar met 41 en nu met 42 punten. Zij kreeg bij de prijsuitreiking een staande ovatie.

Het volgende jaar zal de Olympiade worden gehouden in Zweden.

De Nederlandse ploeg

Drs. J.M. Notenboom (Hogeschool Midden Nederland, Utrecht) en drs. J.G.M. Donkers (Technische Universiteit Eindhoven) waren de begeleiders van het Nederlandse team en hadden voor Nederland zitting in de internationale jury. Prof. dr. H.J.A. Duparc, voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, maakte weer als waarnemer deel uit van de Nederlandse delegatie. De Nederlandse ploeg was geselecteerd uit de prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1989. De voorbereiding op de Internationale Wiskunde Olympiade werd ook dit jaar weer verzorgd door J. Donkers. Evenals voorgaande jaren gebeurde dit door middel van lesbrieven. Voor het eerst was er dit jaar een speciaal trainingskamp georganiseerd, waaraan alle deelnemers aan de lesbrieven, 13 in totaal, hebben deelgenomen. Dit trainingskamp vond plaats in de laatste week van mei en kon mede georganiseerd worden omdat enkele oud-Olympiade deelnemers assistentie hebben verleend. Onmiddellijk na het trainingskamp is toen de ploeg, die Nederland in China zou vertegenwoordigen, samengesteld.

Alle leden van de Nederlandse ploeg hebben dit jaar hun eindexamen van de middelbare school

gedaan. Vijf gaan aan een Nederlandse Universitaire instelling verder studeren (één informatica, één werktuigbouwkunde, één wis- & natuurkunde en twee wiskunde), één gaat naar het buitenland.

De scores van de Nederlandse deelnemers waren als volgt:

Opgave	1	2	3	4	5	6	score
Quintijn Puite	0	7	1	1	1	0	10
René Sitters	0	7	1	1	7	0	16
Ronald de Man	0	7	2	7	7	1	24
Raimondo Eggink	0	3	1	2	7	0	13
Melvin Koppens	3	7	1	1	5	1	18
Erjen Lefeber	0	0	1	1	6	1	9
Totaal	3	31	7	13	33	3	90

Rondom de Olympiade

Na een rustige vliegreis van ruim 10 uren kwamen we op maandag 9 juli om 10 uur op het vliegveld van Beijing aan. Het was er warm (30-35 graden) en vochtig en dat zou het de rest van ons verblijf ook zijn. We werden ondergebracht in het Ji-men hotel op ongeveer 10 km uit het centrum van de stad. 's Middags al bezochten we met de ons toegewezen gids Wang het Zizhuyuan Park. De volgende dag verhuisden de leerlingen naar de campus van het Beijing Language Institute. De behuizing en het eten daar waren goed. Vlak bij de gebouwen was ruime sportaccommodatie waar veelvuldig gebruik van werd gemaakt. Er was volop gelegenheid tot het leggen van contacten met deelnemers van andere landen.

Bij de openingsplechtigheid op woensdag werden we verrast door een schitterende voorstelling van leden van de acrobatenschool van Beijing. Donderdags verhuisden de begeleiders van de ploegen naar het mooie Fragant-Hill hotel op ongeveer 20 km buiten de stad, waar de juryleden zich al enkele dagen bevonden. De correctie en coördinatie van de opgaven verliepen soepel. Alles was prima georganiseerd. In het bijzonder denk ik hierbij aan de vele excursies en uitstapjes die we hebben gemaakt. In comfortabele bussen en met een politie escorte die voor ons het verkeer stilzette, werden we naar de belangrijkste toeristische bezienswaardigheden gebracht. Zo bezochten we het Tian'an-men plein (plein van de Hemelse Vrede), de verboden stad, het zomerpaleis van de laatste keizers, de tempel van de Hemel, het Beihai park, het grote Beijing dierenpark, de Ming graven, waarin de vorsten van de Ming-dynastie begraven liggen, de tempels van de slapende resp. de lachende Boedha in het Fragant Hill Park, en tenslotte het meest indrukwekkende en door iedereen als hoogtepunt ervaren: de Grote Muur in Badaling op ongeveer 60 km van Beijing. Verder woonden we een schitterende voorstelling bij van een Chinese opera.
De slotceremonie op woensdag de 18e vond plaats in het China Grand Theatre en werd besloten met een uitvoering van het laatste deel van Beethovens negende, waarbij Schiller's 'Ode an die Freude' door een groot koor werd gezongen in het Chinees. Het slotdiner vond diezelfde avond plaats in het Grote Paleis van het Volk aan het Tian'an-men plein. Een indrukwekkende belevenis.

Een van de bijzonderheden bij deze Olympiade was de enorme publiciteit die eraan werd gegeven. Dagelijks werd er bij het avondnieuws op de t.v. enkele minuten besteed aan het wel en wee van de Olympiade. Een bijzondere attractie was een interview van de Chinese televisieploeg met twee van onze jongens, dat 's avonds bij het nieuws op de t.v. verscheen.

Naast de vele georganiseerde activiteiten was er toch nog voldoende tijd om op eigen gelegenheid de stad in te gaan, te winkelen en echte Chinese markten te bezoeken. De laatste dag van ons verblijf in Beijing waren we uitgenodigd bij de ambassadeur. Door de heer Van den Berg en zijn echtgenote zijn we bijzonder hartelijk en informeel ontvangen en werden we getracteerd op een heerlijk Hollands diner. Beladen met souvenirs en getooid met Chinese hoeden kwamen we vrijdag 20 juli op Schiphol aan. Een onvergetelijke reis, een geslaagde Olympiade.

Hieronder volgen nog het officieuze landenklassement en de opgaven. De zes gekozen opgaven zijn

voorgesteld door resp. India, Tsjecho-Slowakije, Roemenië, Turkije, West-Duitsland en Nederland. De door Nederland ingezonden opgave (no. 6) was bedacht door Harm Derksen, wiskundestudent aan de Universiteit van Nijmegen en zelf oud-Olympiade-deelnemer.

1	China	230	28	Zweden	91
2	Sovjet-Unie	193	29	Nederland	90
3	Ver. Staten	174	30	Colombia	88
4	Roemenië	171	31	Nieuw-Zeeland	83
5	Frankrijk	168	32	Zuid-Korea	79
6	Hongarije	162	33	Thailand	75
7	DDR	158		Turkije	75
8	Tsjecho-Slowakije	153	35	Spanje	72
			36	Marokko (5)	70
9	Bulgarije	152	37	Mexico	69
10	Engeland	141	38	Argentinië	67
11	Canada	139		Cuba	67
12	BRD (West-D.)	138	40	Bahrein	65
13	Italië	131		Ierland	65
14	Australië	123	42	Finland	59
15	Iran	122	43	Luxemburg (2)	58
16	Oostenrijk	121	44	Tunesië (4)	55
17	India	116	45	Mongolië	54
18	Noorwegen	112	46	Koeweit (4)	53
19	Noord-Korea	109	47	Griekenland	52
20	Polen	108	48	Cyprus (4)	46
21	Hong-Kong	105		Filippijnen	46
22	Vietnam	104	50	Portugal	44
23	Brazilië	102	51	Indonesië	40
24	Joegoslavië	98	52	Macao	32
25	Japan	97	53	IJsland (3)	33
26	Israël	95	54	Algerije(4)	29
27	Singapore	93			

Opgaven

1 Twee koorden AB en CD van een cirkel snijden elkaar binnen die cirkel in een punt E. Op het lijnstuk EB ligt een punt M; $M \neq E$ en $M \neq B$. De raaklijn in E aan de cirkel door de punten D, E en M snijdt de lijnen BC en AC respectievelijk in de punten F en G.

Als $\frac{AM}{AB} = t$, druk dan $\frac{EG}{EF}$ uit in t.

2 Beschouw een verzameling V van $2n - 1$, $n \geq 3$, verschillende punten op de omtrek van een cirkel. Veronderstel dat precies k van deze punten zwart gekleurd worden. Zo'n kleuring heet 'goed' als er tenminste één paar zwarte punten bestaat, zodanig dat op één van de twee cirkelbogen tussen die twee punten precies n punten van V liggen. Bepaal de kleinste waarde voor k met de eigenschap dat elke kleuring van k punten uit V 'goed' is.

3 Bepaal alle gehele getallen $n > 1$, zodanig dat $\frac{2^n + 1}{n^2}$ een geheel getal is.

4 Q^+ is de verzameling van alle rationale getallen groter dan 0.
Geef een functie $f: Q^+ \to Q^+$ met de eigenschap:
$f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y}$ voor alle $x, y \in Q^+$

5 Ga uit van een geheel getal $n_0 > 1$. Twee spelers A en B kiezen afwisselend gehele getallen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ volgens de volgende regels:
Uitgaande van n_{2k+1} kiest A een geheel getal n_{2k+1}, zodanig dat $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$.
Uitgaande van n_{2k+1} kiest B een geheel getal n_{2k+2}, zodanig dat $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ van de gedaante p^r is, waarbij p een priemgetal is en $r \in \mathbb{N}$
Speler A wint als hij het getal 1990 kiest, speler B wint als hij het getal 1 kiest.
(a) Voor welke waarden van n_0 kan speler A winst afdwingen?
(b) Voor welke waarden van n_0 kan speler B winst afdwingen?
(c) Voor welke waarden van n_0 kan geen van beide spelers winst afdwingen?

6 Bewijs dat er een convexe 1990-hoek bestaat met de volgende eigenschappen:
(a) alle hoeken zijn gelijk;
(b) de lengten van de zijden zijn een permutatie van de getallen $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$.

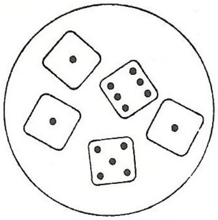
Inhoud

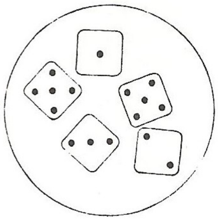
● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

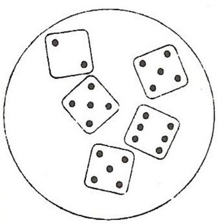
▶ Opgave 624

In augustus 1990 verscheen het boek 'OOG IN OOG' van Leo van der Heijdt, met als ondertitel '5000 jaar dobbelsteen en dobbelspel'. Een prachtig boek over de dobbelsteengeschiedenis. Dat bracht me het volgende spelletje weer in herinnering:
In de linker figuur zijn 5 dobbelstenen geworpen, waarna gezegd wordt: 'Ik zie 4 wakken, 4 ijsberen, 21 vissen en 9 misten de boot'. De bedoeling is dan dat dit spelletje een aantal malen gedaan wordt, zodat de toeschouwers uiteindelijk correct gaan raden wat ze zien.





Ik zal u nog een voorbeeld geven:
'In de rechter figuur ziet u 4 wakken, 10 ijsberen, 19 vissen en 10 misten de boot'. Weet u het al? Vraag het eens aan uw leerlingen! Een heel amusant spel, totdat iemand het begint door te krijgen. En binnen twee dagen kennen alle leerlingen dit grapje.
Wat zou u zeggen bij de volgende worp?



Maximaal 5 punten voor de puzzellader als u binnen een maand na verschijnen instuurt.

▶ Oplossing 621

Was de puzzel met de PANINI voetbalplaatjes zo moeilijk? Slechts 3 inzenders!? Maar gelukkig stuurden ze hun oplossing in, terwijl ze zelf twijfelden aan het correcte antwoord: '. . . laten mij minder dan gebruikelijk overtuigd zijn van de juistheid van deze oplossing.', aldus *A. Boons* (10 punten in de ladderwedstrijd) uit Tilburg.
Samen met *Arie Heikoop* (5) uit Kampen vond hij hetzelfde antwoord als ik indertijd:

Het plaatjesalbum ITALIA '90 moet gevuld worden met 448 plakplaatjes. We spreken af dat er niet geruild wordt. Stel dat we al n plaatjes in ons bezit hebben. Nu kopen we net zo lang 1 plaatje tot we 'succes' hebben (dus geen dubbele). Deze kans is $(448-n)/448$. Hiervoor zullen we gemiddeld $448/(448-n)$ plaatjes moeten kopen. Om alle plaatjes te sparen zijn er gemiddeld $\sum_{n=1}^{448} \frac{448}{448-n} = 2994$ plaatjes nodig.
Dit zijn $2994/6 = 499$ zakjes. De kosten zijn maar liefst *f*249,50!! Gelukkig wordt er in de praktijk door de kinderen geruild.
Bij nabestellen kost 1 plaatje 20 cent (maximaal 50 plaatjes) plus *f*1,50 voor verzendkosten. Goedkoper is 't dan om pas te gaan nabestellen als er 298 verschillende plaatjes verzameld zijn. Naar verwachting zul je daarvoor $448\left(\frac{1}{448} + \frac{1}{447} + \ldots + \frac{1}{151}\right) =$ 489 plaatjes moeten kopen. De resterende 150 koop je voor 20 ct. per stuk plus *f*4,50 voor verzendkosten. De totale kosten zijn in dit geval maar *f*75,27!!

Alledrie kwamen we op exact hetzelfde bedrag, hoewel ik zelf ook de nodige twijfels had. Aangezien er 6 plaatjes in een zakje gaan, moet je steeds stappen van 6 plaatjes nemen.
De vraag blijft natuurlijk nog steeds: 'Hoe willekeurig zijn de plaatjes over de zakjes verdeeld?' Een kennis vertelde me, naar aanleiding van deze puzzel, dat zij eens een complete doos uit de winkel kocht voor vijftig gulden. Het bleek dat met deze 100 zakjes = 600 plaatjes het album in één klap vol was. Tja, waar blijf je dan met de kansrekening?

Alle gebruikte formules werden door *Arie Heikoop* keurig bewezen. Verder gaf hij heel duidelijk aan dat als we minder of meer plaatjes zelf zouden sparen het eindtotaal steeds hoger zou zijn. Hartelijk dank voor deze prachtige oplossing.

Winnaar van de maandelijkse boekenbon van vijfentwintig gulden is geworden de al eerder genoemde
A. Boons, Luchthavenlaan 22, 5042 TD Tilburg.
Met zijn 10 punten staat hij bovenaan de puzzellader en verliest hiermee zijn puntenaantal.
Van harte gefeliciteerd met deze tweede boekenbon in korte tijd en alle succes bij de volgende beklimming.

Heeft u nog puzzels, waarvan u denkt dat ze geschikt zijn voor deze rubriek? Stuur ze eens op en misschien worden ze geplaatst. De vijf punten voor de puzzelladder zijn dan snel verdiend.

Boekbespreking

Frans Nys, *Probleemoplossend denken*, een handleiding voor leraars, Wetenschappelijke uitgeverij 'Campinia' GEEL, Bfrs. 290, 122 blz.

Sinds Polya 1946 zijn boekje over heuristieken schreef, zijn er heel wat boekwerken verschenen over het oplossen van wiskundige problemen en puzzels. Ook Nys wijst erop dat studenten/leerlingen meer dan ooit moeten leren produktief te denken en in het onderwijs moeten leren zelfstandig problemen op te lossen. Na een algemene beschouwing over het denken en het oplossen van problemen, concentreert hij zich op het leren gebruiken van heuristieken. Aan de orde komen heuristieken om de probleemstelling te onderzoeken, de stapsgewijze aanpak van het gegeven naar het gevraagde en omgekeerd, het visueel denken, het vertalen van een tekst naar een wiskundige uitdrukking en het systematisch oplossingsplan.

Het boekje van Tys leest vlot en is voorzien van een hele reeks van bekende voorbeelden, die overal in de literatuur over probleem oplossen opduiken. Het is dan ook een aanrader voor wiskundedocenten, die zich wat willen oriënteren op dit terrein. Een aantal van de besproken puzzels zijn prima te gebruiken voor een verloren wiskundeles of voor het probleem van de week/maand. Daar is tegelijk de beperking van dit boekje mee aangegeven. Tys gaat niet in op het leren oplossen van problemen als onderdeel van het reguliere programma en geeft geen aanwijzingen voor de relatie tussen kennis en heuristieken. Wanneer moet het accent liggen op het oplossen van problemen (bij de instap en de verwerking?), wanneer moet de oefening van vaardigheden komen, welke kennis is nodig om problemen van een bepaald type op te kunnen lossen?

Voor wiskundedocenten, die zich op eigen niveau wat verder willen verdiepen in het onderwijzen van het probleem oplossen zijn de boeken van Polya m.i. nog steeds onovertroffen. Ook dan staan ze zelf voor de taak om in het reguliere programma perioden van probleem oplossen in te lassen. Ook dan moeten ze zelf bedenken welke probleemaanpak algemeen genoeg is om leerlingen ook bij andere problemen voort te helpen en welke probleemaanpak tegelijk specifiek genoeg is om inderdaad het oplossingsproces te bevorderen. Docenten, die het succes niet meer uitsluitend verwachten van het inslijpen van technieken en algoritmen kunnen door het boekje van Tys op het spoor worden gezet van heuristische methoden en een systematische probleemaanpak, die ze in hun eigen lessen kunnen gaan toepassen.

Anne van Streun

Mededeling

Uitwiskeling

Uitwiskeling staat voor 'uitwisseling over wiskundelessen'. Sinds enkele jaren wordt al door 600 Vlaamse leerkrachten 'uitgewiskeld': ideeën en vragen over de lespraktijk, samenvattingen van interessante tijdschriftartikels, concreet lesmateriaal. Het doel is de leerlingen actief en creatief bij de les betrekken. Wiskunde leer je niet van buiten, maar moet je zelf *doen*, uitvinden om problemen op te lossen, toepassen binnen allerlei contexten. Het uitwerken van zulke actieve lessen lukt beter wanneer de leerkrachten de krachten (ideeën) bundelen: 'uitwiskelen' dus.
Dit 'uitwiskelen' gebeurt via een driemaandelijks tijdschrift, onderverdeeld in vier rubrieken: het spinneweb, onder de loep genomen, de bibwijzer en actualiteit. *Het Spinneweb* help je zelf mee spinnen. Een vraag over de aanbreng van een bepaald stuk leerstof, een kort verslag van een uitgeprobeerde les, een leuk idee om de leerlingen te boeien, . . . Dit zijn de draden van het spinneweb waardoor het contact tussen de lezers wordt gerealiseerd. In *Onder de loep genomen* wordt telkens een stuk van het leerplan of een aspect van het wiskundeonderwijs uitgewerkt in een ruimer 'artikel' van de hand van enkele redactieleden, soms samen met een 'gastauteur'. In *De bibwijzer* worden boeken en artikels uit andere tijdschriften die bruikbaar zijn voor actievere wiskundelessen, samengevat en besproken. *Actualiteit* houdt je op de hoogte over bijscholingen, programmawijzigingen, enz.

Wiskel mee uit, over de grenzen heen, en neem een abonnement op de lopende jaargang van Uitwiskeling (4 nummers: november, februari, april, september). Schrijf 350 fr. over op rek. nr. 000-1606607-93 t.a.v. Deprez Johan (adm. Uitwiskeling, Leuvensebaan 263, 3220 Holsbeek. Je ontvangt dan spoedig de reeds verschenen nummers van de jaargang.

Kalender

8 en 9 februari 1991: Garderen, Wiskunde A-lympiade.
20 februari 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
1 maart 1991: Op de scholen voor havo en vwo, Eerste ronde Wiskunde Olympiade.
13 maart 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
17 april 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.